théories complètes autour des arbres

Khalil Djelloul

THÈSE

présentée à

L'UNIVERSITÉ DE LA MÉDITERRANÉE
AIX-MARSEILLE II

École Doctorale de Mathématiques et d'Informatique de Marseille

par

Khalil Djelloul

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'Université d'Aix-Marseille II

spécialité :

INFORMATIQUE

Théories complètes autour des arbres

---

présentée et soutenue publiquement le 15 juin 2006

devant un jury composé de

M. Nicolas Beldiceanu	Professeur, École des mines de Nantes (examinateur)
M. Alain Colmerauer	Professeur, Université de la Méditérranée (directeur)
M. François Fages	Directeur de recherche, INRIA Rocquencourt (rapporteur et président)
M. Thom Fruehwirth	Professeur, University of ULM, Germany (rapporteur)
M. Michel Rueher	Professeur, Université de Nice Sophia Antipolis (examinateur)

Remerciements

- A mon illustre directeur de thèse Alain Colmerauer. Je me rends compte combien en pareille circonstance la force des mots est peu de chose pour vous exprimer mes remerciements. Vous m'avez fait confiance et accepté d'encadrer ce travail avec toute votre amabilité, disponibilité à tout moment, mais surtout une extrême rigueur et recherche de la perfection. Je resterai fidèle à vos principes de valeur, sincèrement attaché à votre personne aux immenses qualités humaines et infiniment reconnaissant.

- A madame Colmerauer. Je ne vous remercierai jamais assez pour toutes les marques de sympathie et de gentillesse que vous m'avez témoignées. Je vous dois mon éternelle gratitude et mon profond respect.

- A madame Thi-Bich-Hanh Dao, pour sa précieuse collaboration, sa ténacité et sa rigueur tout au long de mes recherches. Je la remercie également pour sa gentillesse, sa disponibilité et ses plats asiatiques succulents qu'elle a bien voulu me faire partager au sein de sa charmante petite famille.

- A messieurs les rapporteurs et membres du jury. Vous avez usé de votre précieux temps pour évaluer ce travail et m'avez honoré de votre présence, ce qui me renforce dans mes convictions du dépassement de soi, du souci d'être toujours à la hauteur et de m'y maintenir. Je vous prie de trouver à travers cet espace mes remerciements les plus sincères et ma plus haute considération.

- A tous les membres du Laboratoire d'Informatique Fondamentale de Marseille (L.I.F) et particulièrement Mr Antonio Merenda qui n'a pas ménagé ses efforts dans le domaine administratif.

- A tous les membres du Laboratoire d'Informatique Fondamentale d'Orléans (L.I.F.O) pour m'avoir accueilli si chaleureusement, mettant à ma disposition les moyens humains et matériels qui m'étaient nécessaires. Un clin d'oeil particulier à Arnaud Lallouet et Marco Benedetti !

Dédicaces

A ma chère mère qui n'a jamais ménagé ses efforts pour m'offrir l'essentiel. Elle m'a comblé d'affection. Je lui souhaite longue vie.

A mon cher père qui m'a orienté dés mon plus jeune âge vers l'informatique. Il a toujours cru en moi. «Ne me remercie pas», me répétait-il souvent, «je ne fais que le devoir d'un père envers son fils». Je le remercie quand même !

A mon cher frère à qui je souhaite plein succès pour la suite de son cursus universitaire.

A mon amour, Elise.

A la mémoire de mon cher «papy».

A tous ceux qui m'aiment.

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude d'une méthode générale pour combiner une théorie quelconque du premier ordre à la théorie des arbres finis ou infinis. Pour cela :

Nous introduisons tout d'abord deux classes de théories qu'on appelle *infini-décomposable* et *zéro-infini-décomposable*. Nous montrons alors que ces théories sont complètes et acceptent un algorithme de décision de propositions qui pour toute proposition donne soit *vrai* soit *faux*. Nous montrons également que ces classes de théories englobent un grand nombre de théories fondamentales, nous citerons par exemple : la théorie des rationnels additifs, la théorie de l'ordre dense sans extrêmes, la théorie des arbres finis ou infinis, la construction d'arbres sur un ensemble ordonné et la combinaison d'arbres finis ou infinis et de rationnels additifs ordonnés.

Nous donnons ensuite une manière automatique pour mélanger toute théorie du premier ordre T à la théorie des arbres finis ou infinis. Un tel mélange est alors appelé *extension en arbres* de la théorie T et est noté T^*. Après avoir défini l'axiomatisation de T^* à partir de T, nous définissons une classe de théories qu'on appelle *flexible* et montrons que si T est flexible alors T^* est zéro-infini-décomposable, et donc complète. Les théories flexibles sont des théories ayant des propriétés agréables qui nous permettent de manipuler facilement les formules du premier ordre. On montrera entre autres que la théorie T_{ad} des rationnels additifs ordonnés est flexible et par conséquent que l'extension en arbres T^*_{ad} de T_{ad} est complète.

Nous terminons ce travail par un algorithme de résolution effective de contraintes générales du premier ordre dans T^*_{ad}. L'algorithme est donné sous forme d'un ensemble de 28 règles de réécriture qui transforment toute formule φ, qui peut éventuellement contenir des variables libres, en une disjonction ϕ de formules résolues équivalente à φ dans T^*_{ad} et telle que ϕ est soit la formule *vrai*, soit la formule *faux*, soit une formule ayant au moins une variable libre et n'étant équivalente ni à *vrai* ni à *faux* dans T^*_{ad}. De plus, les solutions des variables libres de ϕ sont présentées d'une manière claire et explicite dans ϕ.

Mots-clés: Théorie des arbres finis ou infinis, théorie complète, combinaison de théories, résolution de contraintes du premier ordre, règles de réécriture.

Table des matières

Introduction générale

Les arbres finis ou infinis jouent un rôle fondamental en informatique. Ils modélisent aussi bien des structures de données que des schémas ou des déroulements de programmes. Dès 1976, G. Huet a proposé un algorithme d'unification de termes infinis [28]. B. Courcelle a étudié les propriétés des arbres infinis dans le cadre des programmes récursifs [12, 13]. A. Colmerauer a modélisé l'exécution des programmes de Prolog II, III et IV par la résolution d'équations et de diséquations dans cette théorie [5, 6, 1]. L'unification des termes finis, ou la résolution d'équations dans la théorie des arbres finis a été étudiée au début par A. Robinson [38]. Des algorithmes avec de meilleurs complexités ont été ensuite proposés par M.S. Paterson et M.N.Wegman [36] et A. Martelli et U. Montanari [35]. La résolution d'équations dans la théorie des arbres infinis a été étudiée par G. Huet [28], A. Colmerauer [4, 5] et J. Jaffar [29]. La résolution de conjonction d'équations et de diséquations dans la théorie des arbres finis ou infinis a été étudiée par A. Colmerauer [5] et H.J. Bürckert [2]. Un algorithme incrémental de résolution de conjonctions d'équations et de diséquations dans les arbres rationnels a été proposé par V.Ramachandran et P. Van Hentenryck [37]. Quant aux formules quantifiées, il existe un algorithme qui se base sur l'élimination des quantificateurs et qui transforme une formule du premier ordre en une combinaison booléenne de formules basiques. Dans le cas des arbres finis, on peut citer le travail de A. Malcev [34], K. Kunen [31], M.J. Maher [33] et H. Comon [8, 11]. Dans le cas des arbres infinis avec un ensemble fini de symboles de fonction, on peut citer le travail de M.J. Maher [33] et H. Comon [8, 11].

M.J. Maher a axiomatisé tous les cas, en donnant une axiomatisation complète de la théorie des arbres finis ou infinis construite sur un ensemble infini de symboles de fonction [33]. C'est cette théorie qui a été le point de départ de nos travaux. Après avoir étudier ces propriétés, nous avons créé la classe des théories *infini-décomposables* et *zéro-infini-décomposables*[1] et avons montré que la plupart des théories fondamentales appartiennent à ces classes de théories. Nous citerons par exemple : la théorie des arbres finis, la théorie des arbres infinis, la théorie des arbres finis ou infinis [19], la théorie de l'ordre dense sans extrêmes, la théorie des rationnels additifs, la construction d'arbres sur un ensemble ordonné [23] et la combinaison des arbres finis ou infinis et des rationnels additifs ordonnés [24]. Les premières intuitions de ces classes de théories proviennent des travaux de T. Dao [16] qui a proposé un algorithme général de résolution de contraintes du premier ordre dans la théorie des arbres finis et la théorie des arbres finis ou infinis [16],[19] en utilisant une simplification de base des conjonctions quantifiées de formules atomiques. Nous avons alors généralisé cette simplification en montrant que dans toute théorie infini-décomposable ou zéro-infini-décomposable, il est possible de décomposer une suite de quantifications existentielles portant sur une conjonction de formules atomiques, en trois suites imbriquées de quantifications ayant des propriétés très particulières, exprimables à l'aide de

[1] Par abus de langage nous accorderons uniquement l'adjectif *décomposable* dans les termes *infini-décomposables* et *zéro-infini-décomposables*.

quantificateurs spéciaux notés $\exists ?$, $\exists !$, $\exists^{\Psi(u)}_{\infty}$, $\exists^{\Psi(u)}_{o\,\infty}$ et appelés *au-plus-un*, *un-et-un-seul*, *infini* et *zéro-infini*. Alors que les quantificateurs $\exists ?$, $\exists !$, ne sont que de simples notations commodes, les quantificateurs $\exists^{\Psi(u)}_{\infty}$, $\exists^{\Psi(u)}_{o\,\infty}$ expriment une propriété qui n'est pas exprimable au premier ordre. Les noms *infini-décomposable* et *zéro-infini-décomposable* n'ont pas été choisis au hasard ! En effet, une théorie zéro-infini décomposable fait intervenir uniquement les quantificateurs $\exists ?$, $\exists !$, $\exists^{\Psi(u)}_{\infty}$ dans toute décomposition de conjonction quantifiée de formules atomiques, alors qu'une théorie zéro-infini-décomposable fait intervenir les quantificateurs $\exists ?$, $\exists !$, $\exists^{\Psi(u)}_{o\,\infty}$. Après avoir étudier les propriétés de ces quantificateurs spéciaux nous avons montré la complétude des théories infini-décomposables et zéro-infini-décomposables et avons déduit de cette preuve deux ensembles succincts de règles de réécriture pour la décision de propositions dans ces classes de théories.

Nous nous sommes ensuite intéressés au problème de combinaison de théories munies de deux signatures non-disjointes et plus exactement à la combinaison de toute théorie du premier ordre T avec la théorie des arbres finis ou infinis. Notons que ce travail théorique trouve ces racines dans les travaux d'Alain Colmerauer [6] qui a modélisé le fonctionnement de Prolog III et IV en utilisant des combinaisons d'arbres, de booléens et de rationnels. Une des difficultés majeures pour mélanger une théorie T quelconque à la théorie des arbres finis ou infinis réside dans le fait que ces deux théories peuvent avoir deux signatures non-disjointes, c'est-à-dire, l'existence d'au moins un symbole de fonction ou de relation ayant deux comportements différents selon que l'on soit dans la théorie des arbres ou dans la théorie T. Il fallait alors trouver un sens sémantique à cette combinaison puis donner une axiomatisation harmonieuse de ce mélange. Pour cela, nous avons défini sémantiquement cette combinaison comme étant une extension en arbres des éléments des modèles de la théorie T. Ainsi, l'axiomatisation de l'extension en arbres de T, notée T^*, se fait essentiellement à partir des trois axiomes modifiés de Michael Maher sur la théorie des arbres éventuellement infinis [33] et de l'axiomatisation de la théorie T en introduisant des contraintes de typage. Pour montrer la complétude d'un tel mélange, nous avons introduit la classe des théories flexibles et avons montré que si T est flexible alors son extension en arbres T^* est une théorie zéro-infini-décomposable et donc complète. Les théories flexibles sont des théories ayant des propriétés agréables qui nous permettent de manipuler facilement les formules du premier ordre.

Une fois ces résultats obtenus, nous nous sommes intéressés à la résolution effective de contraintes du premier ordre dans des extensions en arbres de théories du premier ordre. Pour nous, résoudre effectivement dans T^* une contrainte du premier ordre φ, qui peut éventuellement contenir des variables libres, veut dire transformer φ en une disjonction ϕ de formules résolues, équivalente à φ dans T^* et telle que ϕ est, soit la formule *vrai*, soit la formule *faux*, soit une formule ayant au moins une variable libre et n'étant équivalente ni à *vrai* ni à *faux* dans T^*. Bien entendu, les deux algorithmes définis pour les théories infini-décomposables et zéro-infini-décomposables ne sont pas capables d'un tel traitement, du moment qu'ils décident uniquement des valeurs des propositions. Ils ne sont pas capables d'exprimer clairement les solutions des variables libres dans une formule résolue et ne peuvent garantir qu'une formule finale ayant au moins une variable libre n'est ni fausse ni vrai dans T^*. Nous avons alors choisi l'extension en arbres T^*_{ad} de la théorie T_{ad} des rationnels additifs ordonnés et avons donné un algorithme de résolution effective de contraintes du premier ordre dans T^*_{ad}. Une des difficultés majeures dans ce travail réside dans le fait que (1) tout algorithme résolvant des propositions dans la théorie des arbres finis ou infinis est de complexité non-élémentaire sous forme d'une tour de puissances de 2[41], (2) la théorie des arbres n'admet pas d'élimination complète de quantificateurs, (3) les symboles de fonction $+$ et $-$ ont deux comportements complètement différents suivant qu'ils manipulent des rationnels ou des arbres. Par exemple, l'individu $+(1,1)$ est le rationnel 2, alors que l'individu $+(1, f_0)$ est l'arbre dont la racine est étiquetée $+$ et dont les fils sont : le rationnel 1 ainsi que l'arbre réduit à une feuille étiquetée par f_0.

Cette thèse est composée de cinq chapitres suivis d'une conclusion. Dans le chapitre 1, nous rappelons les définitions de base de logique du premier ordre et donnons une condition suffisante de complétude des théories du premier ordre.

Dans le chapitre 2, nous donnons une définition formelle des théories infini-décomposables. L'idée de base consiste à décomposer une suite de quantifications existentielles portant sur une conjonction de formules atomiques, en trois suites imbriquées de quantifications ayant des propriétés très particulières et exprimables à l'aide des trois quantificateurs spéciaux $\exists ?$, $\exists !$, $\exists_{\infty}^{\Psi(u)}$. Après avoir donné les propriétés de ces quantificateurs spéciaux, nous montrons la complétude de ces théories en utilisant la condition suffisante de complétude établie dans le chapitre 1 et présentons quelques exemples de théories infini-décomposables. Nous donnons également un algorithme de décision de propositions dans toute théorie infini-décomposable T, sous forme d'un ensemble de cinq règles de réécriture qui pour toute proposition donnent soit *vrai* soit *faux* dans T. La correction de notre algorithme est une autre preuve de la complétude des théories infini-décomposables. Nous terminons ce chapitre par une application de l'infini-décomposabilité à la théorie $\mathcal{T}$ des arbres finis ou infinis. Nous montrons alors que $\mathcal{T}$ est infini-décomposable et donnons deux exemples de résolution de propositions dans $\mathcal{T}$.

Dans le chapitre 3, nous présentons la classe des théories *zéro-infni-décomposables* qui est une extension de la classe des théories infini-décomposables en remplaçant le quantificateur infini par le quantificateur zéro-infini. Nous montrons alors la complétude de ces théories en utilisant la condition suffisante de complétude établie dans le chapitre 1, et donnons un exemple de théorie zéro-infini-décomposable qui n'est pas infini-décomposable. Nous donnons également une propriété liant les théories infini-décomposables aux théories zéro-infini-décomposables. Nous présentons ensuite un algorithme de décision de propositions dans toute théorie zéro-infini-décomposable T, sous forme d'un ensemble de six règles de réécriture qui pour toute proposition donnent soit *vrai* soit *faux* dans T. Cet algorithme contient une règle supplémentaire par rapport à celui des théories infini-décomposables due essentiellement au fait que le quantificateur zéro-infini exprime une élimination partielle de quantificateurs alors que le quantificateur infini exprime une élimination complète de quantificateurs. Nous terminons ce chapitre par une application à la construction d'arbres sur un ensemble ordonné $\mathcal{T}_{ord}$. Cette théorie est une axiomatisation complète d'une construction d'arbres sur un ensemble d'individus munis d'une relation d'ordre total, strict, dense et sans extrêmes. Après avoir donné l'axiomatisation de $\mathcal{T}_{ord}$, nous montrons sa zéro-infini-décomposabilité et terminons par un exemple complet de résolution de propositions dans $\mathcal{T}_{ord}$.

Dans le chapitre 4, Nous donnons une manière automatique pour combiner une théorie T du premier ordre avec la théorie des arbres finis ou infinis. L'axiomatisation de l'extension en arbres de T, notée T^*, se fait essentiellement à partir des trois axiomes modifiés de Michael Maher sur la théorie des arbres finis ou infinis [33] et de l'axiomatisation de la théorie T enrichie de contraintes de typage. Nous donnons également une définition formelle du modèle standard M^* de la théorie T^* à partir du modèle standard M de T. Pour montrer la complétude de la théorie T^*, nous introduisons une nouvelle classe de théories que nous appelons *flexible* et montrons que si T est une théorie flexible, alors son extension en arbres, c'est-à-dire T^*, est zéro-infini-décomposable et par conséquent, complète. Nous terminons ce chapitre par une application à l'extension en arbres T^*_{ad} de la théorie T_{ad} des rationnels additifs ordonnés. On montre alors que T_{ad} est flexible et par conséquent que T^*_{ad} est complète

Enfin, dans le chapitre 5, nous donnons un algorithme de résolution effective de contraintes générales du premier ordre dans la théorie T^*_{ad}. Après avoir introduit un exemple concret de contraintes dans T^*_{ad}, nous présentons notre algorithme de résolution sous la forme d'un ensemble de 28 règles de réécriture, qui transforment toute formule φ en une disjonction ϕ de formules résolues, équivalente à φ dans T^*_{ad} et telle que ϕ est, soit la formule *vrai*, soit la formule *faux*, soit une formule ayant au moins une variable libre et n'étant équivalente ni à *vrai* ni à *faux* dans T^*_{ad}. Alors que les deux algorithmes donnés dans les chapitres 2 et 3 ne sont que de simples algorithmes de décision de propositions, cet algorithme exprime les solutions des variables libres d'une manière claire et explicite et est capable de vérifier si une formule ayant au moins une variable libre est toujours vraie ou toujours fausse dans T^*_{ad}. Il garantit également que toute disjonction ϕ de formules résolues ayant au moins une variable libre admet au moins deux instanciations explicites ϕ_1 et ϕ_2 telles que dans tout modèle M^*_{ad} de T^*_{ad} on ait $M^*_{ad} \models \phi_1$ et $M^*_{ad} \models \neg\phi_2$. Nous terminons ce chapitre par un exemple de résolution d'une contrainte ayant deux variables libres mais étant toujours équivalente à *faux* dans T^*_{ad}.

La condition suffisante de complétude présentée dans le chapitre 1, les quantificateurs $\exists^{\Psi(u)}_{\infty}$ et $\exists^{\Psi(u)}_{o\,\infty}$, la classe des théories infini-décomposables et zéro-infini-décomposables, l'axiomatisation automatique de T^* à partir de T, les théories flexibles et l'algorithme de résolution dans T^*_{ad} sont nos contributions essentielles dans cette thèse.

Chapitre 1

Préliminaires

Sommaire

Nous présentons dans ce chapitre introductif les définitions de base de logique du premier ordre, modèle, théorie et théorie complète, et terminons par une condition suffisante de complétude des théories du premier ordre.

1.1 Langage du premier ordre

Soient V un ensemble infini dénombrable de *variables* et L l'ensemble des symboles *logiques*

$$=, \mathit{vrai}, \mathit{faux}, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, (,).$$

Soit maintenant un ensemble supplémentaire S de symboles, appelé *signature* et partitionné en deux sous-ensembles : l'ensemble F des symboles *de fonction* et l'ensemble R des symboles *de relation*. A chaque symbole de fonction et de relation est attaché un entier n positif ou nul, son *arité*. Un symbole n-aire est un symbole d'arité n. Un symbole de fonction 0-aire est appelé *constante*. Fixons nous alors une signature $S = F \cup R$ pour tout ce chapitre 1.

Un *terme* ou S-*terme*, est un mot construit sur $L \cup S \cup V$, de l'une des deux formes suivantes

$$x,\ ft_1 \dots t_n,$$

avec x pris dans V, f un symbole de fonction n-aire pris dans F et les t_i des termes de tailles plus petites que celui qui est en train d'être défini.

Une *formule* ou S-*formule* est un mot construit sur $L \cup S \cup V$ de l'une des onze formes suivantes

$$\begin{gathered} s = t,\ rt_1 \dots t_n,\ \mathit{vrai},\ \mathit{faux}, \\ \neg\varphi,\ (\varphi \wedge \psi),\ (\varphi \vee \psi),\ (\varphi \rightarrow \psi),\ (\varphi \leftrightarrow \psi), \\ (\forall x\, \varphi),\ (\exists x\, \varphi), \end{gathered} \tag{1.1}$$

avec $x \in V$, s, t et t_i des termes, r un symbole de relation n-aire pris dans R et φ et ψ des formules de tailles plus petites que celle qui est en train d'être définie. Les formules de la première ligne de (1.1) sont dites *atomiques*, et *à plat* si elles sont de l'une des formes suivantes

$$vrai,\ faux,\ x_0 = fx_1...x_n,\ x_0 = x_1,\ rx_1...x_n,$$

où les x_i sont des variables éventuellement non distinctes prises dans V, f un symbole de fonction n-aire pris dans F et r un symbole de relation n-aire pris dans R. Une *équation* ou S-équation est une formule de la forme $s = t$ avec s et t des termes. Par abus de langage, une *relation* ou S-relation est une formule de la forme $rt_1 \dots t_n$ avec r un symbole de relation n-aire pris dans R et les t_i des termes. L'ensemble des termes et formules forme un *langage du premier ordre avec égalité*.

On rappelle qu'une occurrence d'une variable x dans une formule est *liée* si elle se produit à l'intérieur d'une sous-formule de la forme $(\forall x\, \varphi)$ ou $(\exists x\, \varphi)$. Elle est *libre* dans le cas contraire. Les *variables libres d'une formule* sont celles qui ont au moins une occurrence libre dans cette formule. Si φ est une formule, alors on note $var(\varphi)$ l'ensemble des variables libres de φ. Une *proposition* est une formule sans variables libres.

La syntaxe des expressions étant contraignante, on se permet d'ajouter des parenthèses et d'en enlever quand il n'y a pas d'ambiguïtés. Nous ne distinguons pas également deux formules qui peuvent être rendues égales moyennant les transformations suivantes de sous-formules

$$\varphi \wedge \psi \Longrightarrow \psi \wedge \varphi,\ \ (\varphi \wedge \psi) \wedge \phi \Longrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \phi),$$
$$\varphi \wedge vrai \Longrightarrow \varphi,\ \ \varphi \vee faux \Longrightarrow \varphi.$$

Si I est l'ensemble $\{i_1, ..., i_n\}$, alors on appelle *conjonction* de formules et on écrit $\bigwedge_{i \in I} \varphi_i$, toute formule de la forme $\varphi_{i_1} \wedge \varphi_{i_2} \wedge ... \wedge \varphi_{i_n} \wedge vrai$. En particulier, si $I = \emptyset$, alors la conjonction $\bigwedge_{i \in I} \varphi_i$ se réduit à la formule *vrai*. On note PL l'ensemble des conjonctions de formules à plat et AT l'ensemble des conjonctions de formules atomiques. Un ensemble Ψ de formules est *fermé pour la conjonction* si pour toutes formules φ et ϕ de Ψ, la formule $\varphi \wedge \phi$ est un élément de Ψ. Enfin, si I est un ensemble fini, alors on note $Card(I)$ sa cardinalité, c'est-à-dire, le nombre de ses éléments.

1.2 Modèle et théorie

1.2.1 Modèle

Un *modèle* ou *S-modèle* est un triplet $M = (\mathcal{M}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$, où $\mathcal{M}$ est un ensemble non vide contenant les *individus* du modèle M et où $\mathcal{F}$ et $\mathcal{R}$ sont des ensembles de fonctions et de relations dans l'ensemble $\mathcal{M}$, indicés par les éléments de S. Plus précisément, si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{R}$ sont notés respectivement $(f^M)_{f \in F}$ et $(r^M)_{r \in R}$ alors

- $\mathcal{M}$, *l'univers* ou *domaine* de M, est un ensemble **non vide** disjoint de S, ses éléments sont appelés *individus* de M ;
- pour chaque symbole f de fonction n-aire pris dans F, f^M est une opération n-aire dans $\mathcal{M}$, c'est-à-dire une application de $\mathcal{M}^n$ dans $\mathcal{M}$. En particulier, si f est une constante f^M est un élément de $\mathcal{M}$;
- pour chaque symbole r de relation n-aire pris dans R, r^M est une relation n-aire dans $\mathcal{M}$, c'est-à-dire un sous-ensemble de $\mathcal{M}^n$.

Soit $M = (\mathcal{M}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ un modèle. Une *M-formule* φ est une formule construite sur la signature $S \cup \mathcal{M}$ au lieu de S, en considérant les éléments de $\mathcal{M}$ comme des symboles de fonction d'arité

0. Si pour chaque variable libre x de φ, on remplace toute occurrence de x par un même élément de $\mathcal{M}$, alors on obtient une M-formule appelée *instanciation* de φ par des individus de M.

Soit φ est une formule, on dit que φ *est vraie dans* M et on écrit

$$M \models \varphi, \tag{1.2}$$

pour signifier que, pour toute instanciation φ' de φ par des individus de M, l'ensemble $\mathcal{M}$ a la propriété exprimée par $\varphi\prime$, lorsqu'on interprète les symboles de fonction et de relation de $\varphi\prime$ par les fonctions et relations correspondantes dans $\mathcal{M}$, et lorsqu'on attribue aux symboles logiques leur sens habituel.

Remarque 1.2.1.1 *Pour toute formule φ sans variables libres, une et une seule des propriétés suivantes est vérifiée : $M \models \varphi$, $M \models \neg\varphi$.*

Terminons par une notation commode. Soient $\bar{x} = x_1...x_n$ un mot sur V et $\bar{i} = i_1...i_n$ un mot sur $\mathcal{M}$ ou V de la même longueur que $\bar{x}$. Soient $\varphi(\bar{x})$ et ϕ deux M-formules. On désigne par $\varphi(\bar{i})$, respectivement $\phi_{\bar{x}\leftarrow\bar{i}}$, la M-formule obtenue en remplaçant dans $\varphi(\bar{x})$, respectivement dans ϕ, chaque occurrence libre de x_j par i_j.

1.2.2 Théorie

Une *théorie* ou *S-théorie* T est un ensemble de propositions éventuellement infini appelées *axiomes*. On dit que le modèle M est un modèle de T si pour tout élément φ de T, $M \models \varphi$. Si φ est une formule, on écrit $T \models \varphi$ si pour tout modèle M de T, $M \models \varphi$. On dit que les formules φ et ψ sont *équivalentes dans* T si $T \models \varphi \leftrightarrow \psi$. Un ensemble Ψ de formules est dit T-fermé si

- $\Psi \subseteq AT$,
- Ψ est fermé pour la conjonction,
- toute formule φ à plat est équivalente dans T à une formule qui appartient à Ψ et qui ne fait pas intervenir d'autres variables libres que celles de φ.

Les ensembles AT et PL sont T-fermés dans toute théorie T. Cette notion de T-fermeture nous sera utile pour transformer toute formule de PL en une formule atomique qui appartient à Ψ. Les transformations de formules normalisées en formules de travail définies dans la sous-section 2.3.2 se basent également sur cette notion de T-fermeture.

Terminons par une propriété utilisée pour manipuler les formules. Nous l'utiliserons sans la mentionner.

Propriété 1.2.2.1 *Si φ et ψ sont des formules équivalentes dans T et si φ' est une formule vraie dans T, alors la formule ψ', obtenue en remplaçant dans φ' une occurrence de φ par ψ, est vraie dans T.*

1.2.3 Théorie complète

Soit φ une proposition. Si T n'a pas de modèle (il y aurait trop d'axiomes) alors on a à la fois $T \models \varphi$ et $T \models \neg\varphi$. Il est aussi possible (il n'y aurait pas assez d'axiomes) que φ soit vraie dans certains modèles de T et fausse dans d'autres. On a alors ni $T \models \varphi$ ni $T \models \neg\varphi$. Les théories dans lesquelles ce phénomène est exclu sont dites *complètes.*

Plus formellement, une théorie T est dite *complète* si, pour toute proposition φ, une et une seule des propriétés suivantes est vérifiée : $T \models \varphi$, $T \models \neg\varphi$. Une *axiomatisation complète* d'une structure M est un ensemble récursif T de propositions tel que pour toute proposition φ, $T \models \varphi$ ssi $M \models \varphi$.

Terminons cette sous-section par une condition suffisante de complétude des théories du premier ordre. Dans tout ce qui suit, nous utiliserons l'abréviation svls pour *"sans variables libres supplémentaires* ". Une formule φ est équivalente à une formule svls ψ dans T signifie que $T \models \varphi \leftrightarrow \psi$ et ψ ne fait pas intervenir d'autres variables libres que celles de φ.

Propriété 1.2.3.1 *Une théorie T est complète s'il existe un ensemble de formules, dites* de base*, tel que*

1. *toute formule à plat soit équivalente dans T à une combinaison booléenne svls de formules de base,*
2. *pour toute formule de base φ, soit $T \models \varphi$, soit $T \models \neg\varphi$,*
3. *toute formule de la forme*
$$\exists x\, ((\textstyle\bigwedge_{i\in I} \varphi_i) \wedge (\bigwedge_{i\in I'} \neg\varphi_i)), \tag{1.3}$$
avec les φ_i des formules de base, soit équivalente, dans T à une combinaison booléenne svls de formules de base.

Preuve. Soit Φ l'ensemble des formules φ qui sont équivalentes, dans T, à une formule ϕ qui est une combinaison booléenne de formules de base et qui ne fait pas intervenir d'autres variables libres que celles de φ.

Montrons tout d'abord que toute formule ψ appartient à Φ. Sans perte de généralité, on peut se limiter au cas où φ ne fait intervenir que des formules à plat, la négation $\neg$, le connecteur $\wedge$ et le quantificateur $\exists$. Procédons par induction sur la structure syntaxique de φ. Si ψ est atomique, c'est vrai du fait de l'hypothèse 1. Si ψ est de la forme $\neg\varphi_1$ ou $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, avec $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$, c'est vrai du fait de la définition de Φ. Si ψ est de la forme $\exists x\, \varphi$, avec $\varphi \in \Phi$, alors par définition de Φ, la formule φ est équivalente à une formule svls φ' qui est une combinaison booléenne svls de formules de base φ_{ij}. Sans perte de généralité on peut supposer que φ' est de la forme

$$\varphi' = \textstyle\bigvee_{i\in I}((\bigwedge_{j\in J} \varphi_{ij}) \wedge (\bigwedge_{j\in J'} \neg\varphi_{ij})). \tag{1.4}$$

Donc, en distribuant le quantificateur existentiel, la formule $\exists x\, \varphi'$ est équivalente dans T à

$$\textstyle\bigvee_{i\in I}(\exists x\, ((\bigwedge_{j\in J} \varphi_{ij}) \wedge (\bigwedge_{j\in J'} \neg\varphi_{ij}))), \tag{1.5}$$

qui d'après l'hypothèse 3 appartient à Φ. Donc, la formule $\exists x\, \varphi$, c'est à dire ψ, appartient à Φ.

Soit maintenant une formule ψ sans variables libres. D'après ce que nous venons de démontrer, $\psi \in \Phi$. La formule ψ est donc équivalente, dans T, à une combinaison booléenne de formules de base sans variables libres. D'après l'hypothèse 2, une et une seule des propriétés suivantes est vérifiée : $T \models \psi$, $T \models \neg\psi$. Donc T est une théorie complète. $\square$

Corollaire 1.2.3.2 *Si T satisfait aux trois conditions de la propriété 1.2.3.1 alors toute formule est équivalente dans T à une combinaison booléenne svls de formules de base.*

Ce corollaire est une conséquence de la preuve de la propriété 1.2.3.1 dans laquelle nous avons montré que si Φ est l'ensemble des formules qui sont équivalentes dans T à une combinaison booléenne svls de formules de base, alors toute formule ψ appartient à Φ.

Chapitre 2

Théorie infini-décomposable

Sommaire

Nous présentons dans ce chapitre une définition formelle des théories infini-décomposables. L'idée de base consiste à décomposer une suite de quantifications existentielles portant sur une conjonction de formules atomiques, en trois suites imbriquées de quantifications ayant des propriétés très particulières, exprimables à l'aide de trois quantificateurs spéciaux notés $\exists ?$, $\exists !$, $\exists_{\infty}^{\Psi(u)}$ et appelés *au-plus-un*, *un-et-un-seul*, *infini*. Nous montrons la complétude de ces théories en utilisant la condition suffisante de complétude établie dans le chapitre 1 et présentons quelques exemples de théories infini-décomposables. Nous donnons également un algorithme de décision de propositions dans toute théorie infini-décomposable T, sous forme d'un ensemble de cinq règles de réécriture qui transforment une formule φ, qui peut éventuellement contenir des variables libres, en une conjonction svls ϕ de formules résolues, équivalente à φ dans T et telle que ϕ est, soit la formule *vrai*, soit la formule $\bigwedge_{i \in I} \neg vrai$, soit une formule ayant au moins une variable libre et facilement transformable en une combinaison booléenne de conjonctions quantifiées de formules atomiques. En particulier, si φ n'a pas de variables libres alors ϕ est, soit la formule *vrai*, soit la formule $\neg vrai$. La correction de notre algorithme est une autre preuve de la complétude des théories décomposables. Nous terminons ce chapitre par une application de l'infini-décomposabilité à la théorie $\mathcal{T}$ des arbres finis ou infinis. Nous montrons alors que $\mathcal{T}$ est infini-décomposable et donnons deux exemples de résolution de propositions dans $\mathcal{T}$. Notons que ce chapitre a fait l'objet des publications suivantes : [18], [19], [22].

2.1 Quantificateurs particuliers

2.1.1 Quantificateurs vectoriels : $\exists?$, $\exists!$

Soient M un modèle et T une théorie. Soient $\bar{x} = x_1 \dots x_n$ et $\bar{y} = y_1 \dots y_n$ deux mots sur V de même longueur. Soient ψ, ϕ, φ et $\varphi(\bar{x})$ des M-formules. On écrit

$$\begin{array}{ll} \exists \bar{x}\, \varphi & \text{pour } \exists x_1 ... \exists x_n\, \varphi, \\ \forall \bar{x}\, \varphi & \text{pour } \forall x_1 ... \forall x_n\, \varphi, \\ \exists ? \bar{x}\, \varphi(\bar{x}) & \text{pour } \forall \bar{x} \forall \bar{y}\, \varphi(\bar{x}) \wedge \varphi(\bar{y}) \rightarrow \bigwedge_{i \in \{1,\dots,n\}} x_i = y_i, \\ \exists ! \bar{x}\, \varphi & \text{pour } (\exists \bar{x}\, \varphi) \wedge (\exists ? \bar{x}\, \varphi). \end{array}$$

Le mot $\bar{x}$, qui peut éventuellement être le mot vide ε, est appelé *vecteur de variables*. Les formules $\exists ? \varepsilon \varphi$ et $\exists ! \varepsilon \varphi$ sont respectivement équivalentes à *vrai* et à φ dans tout modèle M. Notons que ces quantificateurs ne sont que des notations commodes qui peuvent s'exprimer au premier ordre.

Notation 2.1.1.1 *Soient Q un quantificateur vectoriel pris dans $\{\forall, \exists, \exists!, \exists?\}$ et $\bar{x}$ un vecteur de variables prises dans V. Soient φ et ϕ deux formules. On écrit*

$$Q\bar{x}\, \varphi \wedge \phi \ \textit{ pour } \ Q\bar{x}\, (\varphi \wedge \phi).$$

Exemple 2.1.1.2 *Soit $I = \{1, ..., n\}$ un ensemble fini. Soient φ et ϕ_i avec $i \in I$ des formules et soient $\bar{x}$ et $\bar{y}_i$ avec $i \in I$ des vecteurs de variables. On écrit*

$$\begin{array}{ll} \exists \bar{x}\, \varphi \wedge \neg \phi_1 & \textit{pour } \exists \bar{x}\, (\varphi \wedge \neg \phi_1), \\ \forall \bar{x}\, \varphi \wedge \phi_1 & \textit{pour } \forall \bar{x}\, (\varphi \wedge \phi_1), \\ \exists ! \bar{x}\, \varphi \wedge \bigwedge_{i \in I} (\exists \bar{y}_i \phi_i) & \textit{pour } \exists ! \bar{x}\, (\varphi \wedge (\exists \bar{y}_1 \phi_1) \wedge ... \wedge (\exists \bar{y}_n \phi_n) \wedge \textit{vrai}), \\ \exists ? \bar{x}\, \varphi \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{y}_i \phi_i) & \textit{pour } \exists ? \bar{x}\, (\varphi \wedge (\neg(\exists \bar{y}_1 \phi_1)) \wedge ... \wedge (\neg(\exists \bar{y}_n \phi_n)) \wedge \textit{vrai}). \end{array}$$

Propriété 2.1.1.3 *Si $T \models \exists ? \bar{x}\, \varphi$ alors*

$$T \models (\exists \bar{x}\, \varphi \wedge \neg \phi) \leftrightarrow ((\exists \bar{x} \varphi) \wedge \neg(\exists \bar{x}\, \varphi \wedge \phi)). \tag{2.1}$$

Preuve. Soit M un modèle quelconque de T et $\exists \bar{x}\, \varphi' \wedge \neg \phi'$ une instanciation de $\exists \bar{x}\, \varphi \wedge \neg \phi$ par des individus de M. Notons φ'_1 la M-formule $(\exists \bar{x}\, \varphi' \wedge \neg \phi')$ et φ'_2 la M-formule $(\exists \bar{x}\, \varphi') \wedge \neg(\exists \bar{x} \varphi' \wedge \phi')$. Pour montrer l'équivalence (2.1), il suffit de montrer que

$$M \models \varphi'_1 \leftrightarrow \varphi'_2. \tag{2.2}$$

Si $M \models \neg(\exists \bar{x}\, \varphi')$ alors $M \models \neg \varphi'_1$ et $M \models \neg \varphi'_2$, donc l'équivalence (2.2) est satisfaite.
Si $M \models \exists \bar{x}\, \varphi'$ alors du fait que $T \models \exists ? \bar{x}\, \varphi'$, il existe un vecteur unique $\bar{i}$ d'individus de M tel que $M \models \varphi'_{\bar{x} \leftarrow \bar{i}}$. Deux cas sont à étudier

Si $M \models \neg(\phi'_{\bar{x} \leftarrow \bar{i}})$, alors $M \models (\varphi' \wedge \neg \phi')_{\bar{x} \leftarrow \bar{i}}$, donc $M \models \varphi'_1$. Du fait que $\bar{i}$ soit unique et $M \models \neg(\phi'_{\bar{x} \leftarrow \bar{i}})$, alors il n'existe aucun vecteur $\bar{u}$ d'individus de M tel que $M \models (\varphi' \wedge \phi')_{\bar{x} \leftarrow \bar{u}}$. Par conséquent, $M \models \neg(\exists \bar{x}\, \varphi' \wedge \phi')$ et donc $M \models \varphi'_2$. On a $M \models \varphi'_1$ et $M \models \varphi'_2$, donc l'équivalence (2.2) est satisfaite.

Si $M \models \phi'_{\bar{x}\leftarrow\bar{i}}$, alors $M \models (\varphi' \wedge \phi')_{\bar{x}\leftarrow\bar{i}}$, donc $M \models \neg\varphi'_2$. Du fait que $\bar{i}$ soit unique et $M \models \phi'_{\bar{x}\leftarrow\bar{i}}$, alors il n'existe aucun vecteur $\bar{u}$ d'individus de M tel que $M \models (\varphi' \wedge \neg\phi')_{\bar{x}\leftarrow\bar{u}}$. Par conséquent, $M \models \neg(\exists \bar{x}\, \varphi' \wedge \neg\phi')$ et donc $M \models \neg\varphi'_1$. On a $M \models \neg\varphi'_1$ et $M \models \neg\varphi'_2$, donc l'équivalence (2.2) est satisfaite. □

Corollaire 2.1.1.4 *Si* $T \models\ \exists ?\bar{x}\, \varphi$ *alors*

$$T \models (\exists \bar{x}\, \varphi \wedge \bigwedge_{i\in I} \neg\phi_i) \leftrightarrow ((\exists \bar{x} \varphi) \wedge \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{x}\, \varphi \wedge \phi_i)).$$

Preuve. Soit ψ la formule $\neg(\bigwedge_{i\in I} \neg\phi_i)$. La formule

$$\exists \bar{x}\, \varphi \wedge \bigwedge_{i\in I} \neg\phi_i,$$

est équivalente dans T à

$$\exists \bar{x}\, \varphi \wedge \neg\psi.$$

Du fait que $T \models \exists ?\bar{x}\, \varphi$, alors d'après la propriété 2.1.1.3, la formule précédente est équivalente dans T à

$$(\exists \bar{x}\, \varphi) \wedge \neg(\exists \bar{x}\, \varphi \wedge \psi),$$

qui est équivalente dans T à

$$(\exists \bar{x}\, \varphi) \wedge \neg(\exists \bar{x}\, \varphi \wedge \neg(\bigwedge_{i\in I} \neg\phi_i)),$$

donc à

$$(\exists \bar{x}\, \varphi) \wedge \neg(\exists \bar{x}\, \varphi \wedge (\bigvee_{i\in I} \phi_i)),$$

c'est-à-dire à

$$(\exists \bar{x}\, \varphi) \wedge \neg(\exists \bar{x}\, (\bigvee_{i\in I} (\varphi \wedge \phi_i))),$$

et donc à

$$(\exists \bar{x}\, \varphi) \wedge \neg(\bigvee_{i\in I} (\exists \bar{x}\, \varphi \wedge \phi_i)).$$

la formule précédente est finalement équivalente dans T à

$$(\exists \bar{x}\, \varphi) \wedge \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{x}\, \varphi \wedge \phi_i).$$

□

Propriété 2.1.1.5 *Si* $T \models \exists ?\bar{y}\phi$ *et si aucune variable de* $\bar{y}$ *n'a d'occurrences libres dans* φ *alors*

$$T \models (\exists \bar{x}\, \varphi \wedge \neg(\exists \bar{y}\, \phi \wedge \psi)) \leftrightarrow \begin{bmatrix} (\exists \bar{x}\, \varphi \wedge \neg(\exists \bar{y}\, \phi)) \\ \vee \\ (\exists \overline{xy}\, \varphi \wedge \phi \wedge \neg\psi) \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Preuve. La formule
$$\exists\bar{x}\,\varphi \wedge \neg(\exists\bar{y}\,\phi \wedge \psi),$$
est équivalente dans T à
$$\exists\bar{x}\,\varphi \wedge \neg(\exists\bar{y}\,\phi \wedge \neg(\neg\psi)),$$
qui, du fait que $T \models \exists?\bar{y}\phi$ et du fait de la propriété 2.1.1.3, est équivalente dans T à
$$\exists\bar{x}\,\varphi \wedge \neg((\exists\bar{y}\,\phi) \wedge \neg(\exists\bar{y}\phi \wedge \neg\psi)),$$
c'est-à-dire à
$$\exists\bar{x}\,\varphi \wedge ((\neg(\exists\bar{y}\,\phi)) \vee (\exists\bar{y}\phi \wedge \neg\psi)),$$
et donc à
$$\begin{bmatrix}(\exists\bar{x}\,\varphi \wedge \neg(\exists\bar{y}\,\phi))\\ \vee \\ (\exists\bar{x}\,\varphi \wedge (\exists\bar{y}\phi \wedge \neg\psi))\end{bmatrix},$$
qui, du fait qu'aucune variable de $\bar{y}$ n'ait d'occurrences libres dans φ, est équivalente dans T à
$$\begin{bmatrix}(\exists\bar{x}\,\varphi \wedge \neg(\exists\bar{y}\,\phi))\\ \vee \\ (\exists\bar{x}\bar{y}\,\varphi \wedge \phi \wedge \neg\psi)\end{bmatrix}.$$
□

Propriété 2.1.1.6 *Si* $T \models \exists!\bar{x}\,\varphi$ *alors*
$$T \models (\exists\bar{x}\,\varphi \wedge \neg\phi) \leftrightarrow \neg(\exists\bar{x}\,\varphi \wedge \phi).$$

Corollaire 2.1.1.7 *Si* $T \models \exists!\bar{x}\,\varphi$ *alors*
$$T \models (\exists\bar{x}\,\varphi \wedge \bigwedge_{i\in I} \neg\phi_i) \leftrightarrow \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists\bar{x}\,\varphi \wedge \phi_i).$$

Corollaire 2.1.1.8 *Si* $T \models\ \psi \rightarrow (\exists!\bar{x}\,\varphi)$ *alors*
$$T \models (\psi \wedge (\exists\bar{x}\,\varphi \wedge \bigwedge_{i\in I} \neg\phi_i)) \leftrightarrow (\psi \wedge \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists\bar{x}\,\varphi \wedge \phi_i)).$$

2.1.2 Quantificateur infini : $\exists^{\Psi(u)}_{\infty}$

Soit M un modèle et T une théorie. Soit $\varphi(x)$ une M-formule et $\Psi(u)$ un ensemble de formules ayant au plus u comme variable libre.

Définition 2.1.2.1 *On écrit*
$$M \models \exists^{\Psi(u)}_{\infty} x\,\varphi(x), \tag{2.4}$$
si pour toute instanciation $\exists x\,\varphi'(x)$ *de* $\exists x\,\varphi(x)$ *par des individus de* M *et pour tout sous-ensemble fini* $\{\psi_1(u), .., \psi_n(u)\}$ *d'éléments de* $\Psi(u)$*, l'ensemble des individus* i *de* M *tels que* $M \models \varphi'(i) \wedge \bigwedge_{j\in\{1,...,n\}} \neg\psi_j(i)$ *est infini.*
On écrit $T \models \exists^{\Psi(u)}_{\infty} x\,\varphi(x)$*, si pour tout modèle* M *de* T *on a (2.4).*

Ce quantificateur infini a un sens uniquement dans les modèles infinis, c'est-à-dire, les modèles dont l'ensemble des individus est infini. Dans le cas particulier où $\Psi(u)$ se réduit à l'ensemble $\{faux\}$, la forme (2.4) signifie tout simplement que M contient une infinité d'individus i tels que $M \models \varphi(i)$. Une des intuitions de base de cette définition provient d'un souhait d'éliminer le quantificateur vectoriel $\exists\bar{x}$ des formules de la forme $\exists\bar{x}\,\varphi \wedge \bigwedge_{i\in I} \neg\phi_i$ avec I un ensemble fini éventuellement vide et les ϕ_i des formules qui n'admettent pas d'élimination locale de quantificateurs. La théorie $\mathcal{T}$ des arbres finis ou infinis présentée dans la section 2.4 est un bon exemple de théorie n'admettant pas d'élimination complète de quantificateurs. L'ensemble $\Psi(u)$ contient dans ce cas, des formules de la forme $\exists\bar{x}\, y = f(\bar{x})$, qui n'acceptent pas d'élimination de quantificateurs.

Propriété 2.1.2.2 *Soit J un ensemble fini (éventuellement vide) et soient $\varphi(x)$ et $\varphi_j(x)$ des M-formules avec $j \in J$. Si $T \models \exists_\infty^{\Psi(u)} x\, \varphi(x)$ et si pour chaque $\varphi_j(x)$, au moins une des propriétés suivantes est satisfaite*

- *$T \models \exists ?x\, \varphi_j(x)$,*
- *il existe $\psi_j(u) \in \Psi(u)$ tel que $T \models \forall x\, \varphi_j(x) \rightarrow \psi_j(x)$,*

alors

$$T \models \exists x\, \varphi(x) \wedge \textstyle\bigwedge_{j\in J} \neg\varphi_j(x).$$

Preuve. Soit M un modèle de T et soit $\exists x\, \varphi'(x) \wedge \bigwedge_{j\in J} \neg\varphi'_j(x)$ une instanciation de $\exists x\, \varphi(x) \wedge \bigwedge_{j\in J} \neg\varphi_j(x)$ par des individus de M. Supposons que les conditions de la propriété 2.1.2.2 soient satisfaites et montrons que

$$M \models \exists x\, \varphi'(x) \wedge \textstyle\bigwedge_{j\in J} \neg\varphi'_j(x). \tag{2.5}$$

Soit J' l'ensemble des $j \in J$ tels que $M \models \exists ?x\, \varphi'_j(x)$ et soit m sa cardinalité. Du fait que pour tout $j \in J'$, $M \models \exists ?x\, \varphi'_j(x)$, alors il suffit que M contienne au moins $m+1$ individus, pour garantir l'existence d'un individu $i \in M$ tel que

$$M \models \bigwedge_{j\in J'} \neg\varphi'_j(i). \tag{2.6}$$

D'autre part, du fait que $T \models \exists_\infty^{\Psi(u)} x\, \varphi(x)$ et d'après la définition 2.1.2.1 on sait que pour tout sous-ensemble fini $\{\psi_1(u), ..., \psi_n(u)\}$ de $\Psi(u)$, l'ensemble des individus i de M tels que $M \models \varphi'(i) \wedge \bigwedge_{k=1}^{n} \neg\psi_k(i)$ est infini. Du fait que pour tout $j \in J - J'$ on ait $M \models \forall x\, \varphi_j(x) \rightarrow \psi_j(x)$, alors $M \models \forall x\, (\neg\psi_j(x)) \rightarrow (\neg\varphi_j(x))$, et donc il existe un ensemble infini ξ d'individus i de M tels que $M \models \varphi'(i) \wedge \bigwedge_{j\in J-J'} \neg\varphi'_j(i)$. Du fait que ξ soit infini, alors il contient au mois $m+1$ individus et donc d'après (2.6) il existe au moins un individu $i \in \xi$ tel que $M \models \varphi'(i) \wedge (\bigwedge_{j\in J-J'} \neg\varphi'_j(i)) \wedge (\bigwedge_{k\in J'} \neg\varphi'_k(i))$. Donc on a bien

$$M \models \exists x\, \varphi'(x) \wedge \bigwedge_{j\in J} \neg\varphi'_j(x).$$

□

Propriété 2.1.2.3 *Si $T \models \exists_\infty^{\Psi(u)} x\, \varphi(x)$ alors $T \models \exists_\infty^{\Psi(u)} x$ vrai.*

Preuve. soit M un modèle de T. Si $T \models \exists_\infty^{\Psi(u)} x\, \varphi(x)$ alors $M \models \exists_\infty^{\Psi(u)} x\, \varphi(x)$. D'après la définition 2.1.2.1, il existe une infinité d'individus i tels que $M \models \varphi(i) \wedge \bigwedge_{j\in J} \neg\varphi_j(i)$ avec $\varphi_j(u) \in \Psi(u)$ pour tout $j \in J$. Donc, il existe un ensemble infini d'individus i tels que $M \models$ *vrai* $\wedge \bigwedge_{j\in J} \neg\varphi_j(i)$ c'est-à-dire $M \models \exists_\infty^{\Psi(u)} x$ *vrai* et donc $T \models \exists_\infty^{\Psi(u)} x$ *vrai*. □

2.2 Théorie infini-décomposable

2.2.1 Définition

Définition 2.2.1.1 *Une théorie T ayant au moins un modèle est dite* infni-décomposable *ou tout simplement* décomposable*, s'il existe un ensemble $\Psi(u)$ de formules ayant au plus u comme variable libre, un ensemble T-fermé A, et trois ensembles A', A'' et A''' de formules de la forme $\exists\bar{x}\alpha$ avec $\alpha \in A$ tels que*

1. *Toute formule de la forme $\exists\bar{x}\,\alpha\wedge\psi$, avec $\alpha \in A$ et ψ une formule quelconque, est équivalente dans T à une formule svls décomposée de la forme*
$$\exists\bar{x}'\,\alpha' \wedge (\exists\bar{x}''\,\alpha'' \wedge (\exists\bar{x}'''\,\alpha''' \wedge \psi)),$$
avec $\exists\bar{x}'\,\alpha' \in A'$, $\exists\bar{x}''\,\alpha'' \in A''$ et $\exists\bar{x}'''\,\alpha''' \in A'''$.
2. *Si $\exists\bar{x}'\alpha' \in A'$ alors $T \models \exists?\bar{x}'\,\alpha'$ et pour toute variable libre y dans $\exists\bar{x}'\alpha'$, au moins une des propriétés suivantes est vérifiée*
   – *$T \models \exists?y\bar{x}'\,\alpha'$,*
   – *il existe $\psi(u) \in \Psi(u)$ tel que $T \models \forall y\,(\exists\bar{x}'\,\alpha') \rightarrow \psi(y)$.*
3. *Si $\exists\bar{x}''\alpha'' \in A''$ alors pour toute variable x''_i de $\bar{x}''$ on a $T \models \exists^{\Psi(u)}_{\infty} x''_i\,\alpha''$.*
4. *Si $\exists\bar{x}'''\alpha''' \in A'''$ alors $T \models \exists!\bar{x}'''\,\alpha'''$.*
5. *Si la formule $\exists\bar{x}'\alpha'$ appartient à A' et n'a pas de variables libres alors $\bar{x}' = \varepsilon$ et $\alpha' \in \{vrai, faux\}$.*

Du fait que A soit T-fermé, alors A est un sous-ensemble de AT. Les formules de A'' et A''' acceptent un élimination complète de quantificateurs du fait des propriétés de leur quantificateur vectoriel associé : $\exists!$, respectivement $\exists^{\Psi(u)}_{\infty}$. Par contre, les formules de A' peuvent éventuellement ne pas accepter d'élimination complète de quantificateurs due au deuxième point de la définition 2.2.1.1 : $T \models \exists?\bar{x}'\alpha'$. Le calcul des ensembles A, A', A'', A''' et $\Psi(u)$ pour une théorie T dépend de l'axiomatisation de T. En général, il suffit de savoir résoudre une formule de la forme $\exists\bar{x}\alpha$ avec $\alpha \in PL$ pour avoir les premières intuitions sur ces ensembles. Informellement, les ensembles A', A'' et A''' peuvent être nommés suivant leur quantificateur vectoriel associé ; ainsi, A' est l'ensemble *au plus une solution* et contient les formules qui ont au plus une instanciation valide dans tout modèle de T. L'ensemble A'' est l'ensemble des *instanciations infinis* et contient les formules qui acceptent une infinité d'instanciations valides dans tout modèle de T. L'ensemble A''' est l'ensemble des *solutions uniques* et contient les formules qui ont une et une seule instanciation valide dans tout modèle de T. Quant à l'ensemble $\Psi(u)$ il contient généralement de simples formules qui ont au plus une variable libre et qui sont de la forme $\exists\bar{x}\alpha$ avec $\alpha \in A$. Notons également, que les ensembles A' et A''' sont généralement non vides du fait que dans tout modèle M de T on ait $M \models \exists?\varepsilon\, x = y$ et $M \models \exists!x\, x = y$.

Propriété 2.2.1.2 *Soit T une théorie décomposable. Toute formule de la forme $\exists\bar{x}\,\alpha$, avec $\alpha \in A$, est équivalente dans T à une formule svls de la forme $\exists\bar{x}'\,\alpha'$ avec $\exists\bar{x}'\alpha' \in A'$.*

Preuve. Soit $\exists\bar{x}\,\alpha$ une formule avec $\alpha \in A$. D'après la définition 2.2.1.1, cette formule est équivalente dans T à une formule svls de la forme
$$\exists\bar{x}'\,\alpha' \wedge (\exists\bar{x}''\,\alpha'' \wedge (\exists\bar{x}'''\,\alpha''')),$$

avec $\exists \bar{x}'\, \alpha' \in A'$, $\exists \bar{x}''\, \alpha'' \in A''$ et $\exists \bar{x}'''\, \alpha''' \in A'''$. Du fait que $\exists \bar{x}'''\, \alpha''' \in A'''$ alors d'après la définition 2.2.1.1, $T \models \exists! \bar{x}''' \alpha'''$ et donc en utilisant le corollaire 2.1.1.7 (avec ϕ égale à *faux*), la formule précédente est équivalente dans T à

$$\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\, \alpha''),$$

qui est équivalente dans T à

$$\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists x''_1 ... x''_{n-1}\, (\exists x''_n\, \alpha'')).$$

Du fait que $\exists \bar{x}''\, \alpha'' \in A''$, alors d'après la définition 2.2.1.1, on a $T \models \exists_{\infty}^{\Psi(u)} x''_n\, \alpha''$ et donc $T \models \exists\, x''_n\, \alpha''$. Par conséquent, la formule précédente est équivalente dans T à

$$\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists x''_1 ... x''_{n-1}\, \mathit{vrai}),$$

et donc à

$$\exists \bar{x}'\, \alpha'.$$

□

Corollaire 2.2.1.3 *Soit T une théorie décomposable. Si la formule $\exists \bar{x}\, \alpha$, avec $\alpha \in A$, n'a pas de variables libres alors, soit $T \models \exists \bar{x}\, \alpha$, soit $T \models \neg(\exists \bar{x}\, \alpha)$.*

Preuve. Soit $\exists \bar{x}\, \alpha$ une proposition avec $\alpha \in A$. D'après la propriété 2.2.1.2, cette proposition est équivalente dans T à une proposition de la forme $\exists \bar{x}'\, \alpha'$ et qui appartient à A'. D'après le dernier point de la définition 2.2.1.1, cette proposition est de la forme $\exists \varepsilon\, \mathit{vrai}$ ou $\exists \varepsilon\, \mathit{faux}$. Du fait que T admette au moins un modèle alors soit $T \models \exists \bar{x}\, \alpha$, soit $T \models \neg(\exists \bar{x}\, \alpha)$. La condition T a au moins un modèle est vitale ! En effet, si T n'avait pas de modèle, alors il se pourrait très bien que $T \models \mathit{vrai} \leftrightarrow \mathit{faux}$ et donc on aurait à la fois $T \models \exists \bar{x}\, \alpha$ et $T \models \neg(\exists \bar{x}\, \alpha)$. □

2.2.2 Complétude

Théorème 2.2.2.1 *Si T est décomposable alors T est complète.*

Preuve. Soit T une théorie décomposable qui satisfait aux cinq conditions de la définition 2.2.1.1. Montrons que T est complète en utilisant la propriété 1.2.3.1 et en prenant comme formules de base les formules de la forme $\exists \bar{x}\, \alpha$, avec $\alpha \in A$. Notons que d'après la définition 2.2.1.1, les ensembles A', A'' et A''' contiennent des formules de la forme $\exists \bar{x} \alpha$ avec $\alpha \in A$.

Montrons que la première condition de la propriété 1.2.3.1 est satisfaite, c'est-à-dire, toute formule à plat est équivalente dans T à une combinaison booléenne svls de formules de base. Soit α une formule à plat. D'après la définition 2.2.1.1 l'ensemble A est T-fermé, donc toute formule à plat est équivalente dans T à une formule svls qui appartient à A. Par conséquent, α est équivalente dans T à une formule svls β qui appartient à A. Du fait que β soit équivalente dans T à $\exists \varepsilon\, \beta$ avec $\beta \in A$, alors α est équivalente à une formule de base[2] et donc la première condition de la propriété 1.2.3.1 est satisfaite.

Montrons que la deuxième condition de la propriété 1.2.3.1 est satisfaite, c'est-à-dire, toute formule de base sans variables libres est équivalente soit à *vrai*, soit à *faux* dans T. Soit $\exists \bar{x}\, \alpha$ avec $\alpha \in A$ une formule de base sans variables libres. D'après le corollaire 2.2.1.3, soit $T \models \exists \bar{x} \alpha$, soit $T \models \neg(\exists \bar{x}\, \alpha)$. Donc T satisfait à la deuxième condition de la propriété 1.2.3.1.

[2]Bien entendu, une formule de base est un cas particulier de combinaison booléenne de formules de base.

Montrons que la troisième condition de la propriété 1.2.3.1 est satisfaite, c'est-à-dire, toute formule de la forme

$$\exists x \, (\textstyle\bigwedge_{i\in I}(\exists \bar{x}_i \, \alpha_i)) \wedge (\textstyle\bigwedge_{j\in J} \neg(\exists \bar{y}_j \, \beta_j)), \tag{2.7}$$

avec $\alpha_i \in A$ pour tout $i \in I$ et $\beta_j \in A$ pour tout $j \in J$, est équivalente dans T à une combinaison booléenne svls de formules de base, c'est-à-dire, une combinaison booléenne svls de formules de la forme $\exists \bar{x}\alpha$ avec $\alpha \in A$. En remontant les quantifications $\exists \bar{x}_i$ après avoir éventuellement renommé certaines variables qui figurent dans chaque $\bar{x}_i$, la formule (2.7) est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$\exists \bar{x} \, (\textstyle\bigwedge_{i\in I} \alpha_i) \wedge \textstyle\bigwedge_{j\in J} \neg(\exists \bar{y}_j \, \beta_j),$$

avec $\alpha_i \in A$ pour tout $i \in I$ et $\beta_j \in A$ pour tout $j \in J$. D'après la définition 2.2.1.1, l'ensemble A est T-fermé, donc il est fermé pour la conjonction. Ainsi, la formule précédente est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$\exists \bar{x} \, \alpha \wedge \textstyle\bigwedge_{j\in J} \neg(\exists \bar{y}_j \, \beta_j),$$

avec $\alpha \in A$ et $\beta_j \in A$ pour tout $j \in J$. D'après le premier point de la définition 2.2.1.1, la formule précédente est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$\exists \bar{x}' \, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}'' \, \alpha'' \wedge (\exists \bar{x}''' \, \alpha''' \wedge \textstyle\bigwedge_{j\in J} \neg(\exists \bar{y}_j \, \beta_j))),$$

avec $\exists \bar{x}' \, \alpha' \in A'$, $\exists \bar{x}'' \, \alpha'' \in A''$, $\exists \bar{x}''' \, \alpha''' \in A'''$ et $\beta_j \in A$ pour tout $j \in J$. Du fait que $\exists \bar{x}''' \, \alpha''' \in A'''$, alors d'après le quatrième point de la définition 2.2.1.1, $T \models \exists! \bar{x}''' \, \alpha''$. Donc, en utilisant le corollaire 2.1.1.7, la formule précédente est équivalente dans T à

$$\exists \bar{x}' \, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}'' \, \alpha'' \wedge \textstyle\bigwedge_{j\in J} \neg(\exists \bar{x}''' \, \alpha''' \wedge (\exists \bar{y}_j \, \beta_j))).$$

En remontant les quantifications $\exists \bar{y}_j$ après avoir éventuellement renommé certaines variables qui figurent dans chaque $\bar{y}_j$, le formule précédente est équivalente dans T à

$$\exists \bar{x}' \, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}'' \, \alpha'' \wedge \textstyle\bigwedge_{j\in J} \neg(\exists \bar{x}''' \exists \bar{y}_j \, \alpha''' \wedge \beta_j)).$$

D'après la définition 2.2.1.1, les ensembles A', A'' et A''' contiennent des formules de la forme $\exists \bar{x}\alpha$ avec $\alpha \in A$, donc $\alpha''' \in A$. Du fait que $\beta_j \in A$ pour toute $j \in J$ et du fait que A soit T-fermé (donc fermé pour la conjonction) alors pour tout $j \in J$ la formule $\alpha''' \wedge \beta_j$ appartient à l'ensemble A. Donc, la formule précédente est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$\exists \bar{x}' \, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}'' \, \alpha'' \wedge \textstyle\bigwedge_{j\in J} \neg(\exists \bar{y}_j \, \beta_j)),$$

avec $\exists \bar{x}' \, \alpha' \in A'$, $\exists \bar{x}'' \, \alpha'' \in A''$, et $\beta_j \in A$ pour tout $j \in J$. D'après le corollaire 2.2.1.2, la formule précédente est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$\exists \bar{x}' \, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}'' \, \alpha'' \wedge \textstyle\bigwedge_{j\in J} \neg(\exists \bar{y}'_j \, \beta'_j)),$$

avec $\exists \bar{x}' \, \alpha' \in A'$, $\exists \bar{x}'' \, \alpha'' \in A''$, et $\exists \bar{y}'_j \, \beta'_j \in A'$ pour tout $j \in J$. Soit alors J_1, l'ensemble des $j \in J$ tel que x''_n n'ait pas d'occurrences libres dans la formule $\exists \bar{y}'_j \beta'_j$. Ainsi, la formule précédente est équivalente dans T à

$$\exists \bar{x}' \, \alpha' \wedge (\exists x''_1 ... \exists x''_{n-1} \begin{bmatrix} (\bigwedge_{j\in J_1} \neg(\exists \bar{y}'_j \, \beta'_j)) \wedge \\ (\exists x''_n \, \alpha'' \wedge \bigwedge_{j\in J-J_1} \neg(\exists \bar{y}'_j \, \beta'_j)) \end{bmatrix}). \tag{2.8}$$

Du fait que $\exists\bar{x}''\,\alpha'' \in A''$ et $\exists\bar{y}'_j\,\beta'_j \in A'$ pour tout $j \in J$, alors d'après la propriété 2.1.2.2 et les points 2 et 3 de la définition 2.2.1.1, la formule (2.8) est équivalente dans T à

$$\exists\bar{x}'\,\alpha' \wedge (\exists x''_1 ... \exists x''_{n-1}\,(vrai \wedge \bigwedge_{j\in J_1} \neg(\exists\bar{y}'_j\,\beta'_j))).$$

En répétant les trois dernières étapes $(n-1)$ fois, en notant J_k l'ensemble des $j \in J_{k-1}$ tels que $x''_{(n-k+1)}$ n'ait pas d'occurrences libres dans $\exists\bar{y}'_j\,\beta'_j$ et en utilisant $(n-1)$ fois la propriété 2.1.2.3, la formule précédente est équivalente dans T à

$$\exists\bar{x}'\,\alpha' \wedge \bigwedge_{j\in J_n} \neg(\exists\bar{y}'_j\,\beta'_j).$$

Du fait que $\exists\bar{x}'\,\alpha' \in A'$, alors d'après le second point de la définition 2.2.1.1, $T \models \exists ?\bar{x}'\,\alpha'$. Donc, en utilisant le corollaire 2.1.1.4, la formule précédente est équivalente dans T à

$$(\exists\bar{x}'\,\alpha') \wedge \bigwedge_{j\in J_n} \neg(\exists\bar{x}'\,\alpha' \wedge (\exists\bar{y}'_j\,\beta'_j)).$$

En remontant les quantifications $\exists\bar{y}_j$ après avoir éventuellement renommé certaines variables qui figurent dans chaque $\bar{y}_j$, la formule précédente est équivalente dans T à

$$(\exists\bar{x}'\,\alpha') \wedge \bigwedge_{j\in J_n} \neg(\exists\bar{x}'\exists\bar{y}'_j\,\alpha' \wedge \beta'_j).$$

D'après la définition 2.2.1.1, les ensembles A', A'' et A''' contiennent des formules de la forme $\exists\bar{x}\alpha$ avec $\alpha \in A$. Donc, du fait que $\exists\bar{x}'\,\alpha' \in A'$ et $\exists\bar{y}'_j\,\beta'_j \in A'$ pour tout $j \in J_n$, alors $\alpha' \in A$ et $\beta_j \in A$ pour tout $j \in J_n$. Du fait que A soit T-fermé, il est fermé pour la conjonction et donc pour tout $j \in J_n$, la formule $\alpha' \wedge \beta'_j$ apparient à A. Ainsi, la formule précédente est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$(\exists\bar{x}\,\alpha) \wedge \bigwedge_{j\in J_n} \neg(\exists\bar{y}_j\beta_j),$$

avec $\alpha \in A$ et $\beta_j \in A$ pour tout $j \in J_n$. Cette formule est une combinaison booléenne de formules de la forme $\exists\bar{x}\alpha$ avec $\alpha \in A$, c'est-à-dire, une combinaison booléenne de formules de base. Notons que nous n'avons jamais ajouté de variables libres et avons renommé uniquement les variables quantifiées. Donc, la troisième condition de la propriété 1.2.3.1 est satisfaite.

Du fait que T satisfasse aux trois conditions de la propriété 1.2.3.1, alors T est une théorie complète. □

D'après le théorème 2.2.2.1 et le corollaire 1.2.3.2, on a la corollaire suivant

Corollaire 2.2.2.2 *Si T est décomposable et si pour toute formule $\exists\bar{x}'\alpha'$ élément de A' on a $\bar{x}' = \varepsilon$, alors T accepte un élimination complète de quantificateurs.*

Preuve. Soit T une théorie décomposable telle que pour toute formule $\exists\bar{x}'\alpha' \in A'$ on ait $\bar{x}' = \varepsilon$. Soit φ une formule quelconque. Dans la preuve du Théorème 2.2.2.1, nous avons montré que T satisfait aux trois conditions de la propriété 1.2.3.1 en prenant comme formules de base, des formules de la forme $\exists\bar{x}\alpha$ avec $\alpha \in A$. Donc, d'après le corollaire 1.2.3.2, la formule φ est équivalente dans T à une combinaison booléenne svls de formules de base, c'est-à-dire, à une combinaison booléenne svls de formules de la forme $\exists\bar{x}\alpha$ avec $\alpha \in A$. D'après la propriété 2.2.1.2, chacune de ces formules de base est équivalente dans T à une formule svls de la forme $\exists\bar{x}'\alpha'$ et qui appartient à A'. Du fait que pour tout $\exists\bar{x}'\alpha' \in A'$ on ait $\bar{x}' = \varepsilon$ et du fait que $\alpha' \in A$ (d'après la structure syntaxique de l'ensemble A' définie dans la définition 2.2.1.1) alors la formule φ est équivalente dans T à une combinaison booléenne d'éléments de A. Du fait que T soit décomposable alors A est T-fermé et donc $A \subseteq AT$. Ainsi, la formule φ est équivalente dans T à une combinaison booléenne svls ϕ de conjonctions de formules atomiques. D'après la syntaxe de nos formules atomiques définie dans le chapitre 1, il est clair que ϕ ne contient plus de quantificateurs. □

Ce corollaire établit le lien direct entre l'ensemble A' et la notion d'élimination de quantificateurs. En effet, si T est décomposable et n'accepte pas d'élimination de quantificateurs alors il suffit d'ajouter des axiomes à T tels que les formules de A' acceptent une élimination complète de quantificateurs pour obtenir une nouvelle théorie complète, décomposable et dotée d'une élimination complète de quantificateurs. Par ailleurs, les ensembles A'' et A''' n'interviennent pas dans ce corollaire du fait que dans toute théorie décomposable T les formules de A'' et A''' acceptent une élimination complète de quantificateurs due a leur quantificateur vectoriel associé $\exists!$ respectivement $\exists_{\infty}^{\Psi(u)}$. Notons également que si T est une théorie décomposable qui satisfait ce corollaire, alors on peut s'intéresser à obtenir le plus petit sous-ensemble T^* d'axiomes de T, tel que T^* accepte toujours une élimination complète de quantificateurs. Pour cela, il suffit d'enlever axiome par axiome de T et de vérifier à chaque fois que la théorie ainsi obtenue satisfasse ce corollaire. Ce corollaire montre également le fait que toute théorie décomposable n'admet pas forcement d'élimination complète de quantificateurs. En effet, les théories des arbres finis, infinis et finis ou infinis introduites par M. Maher [33] n'acceptent pas d'élimination complète de quantificateurs ; ce qui ne les empêchent pas d'être décomposables et donc complètes [19].

2.2.3 Exemples de base

Nous présentons dans cette sous-section deux théories fondamentales et montrons leur décomposabilité. La première représente une axiomatisation d'un ensemble infini d'individus tous distincts munis d'un ensemble de fonctions et de relations vide. Cette théorie notée Eq n'est rien d'autre qu'une petite extension de la théorie équationnelle de Clark, plus connue sous le nom de *Clak equational theory CET* [3], même si d'après la syntaxe de nos formules, l'égalité est considérée comme un symbole logique primitif muni de ses propriétés usuelles (commutativité, transitivité ...). La deuxième théorie représente l'axiomatisation des rationnels ou réels additifs munis des opérations d'addition et de soustraction. Le but de ces deux exemples est de montrer la décomposabilité de théories fondamentales dont les propriétés sont bien connues. Par ailleurs, nous présenterons dans la section 2.4 une théorie décomposable beaucoup plus complexe que celles définies dans cette sous-section et qui nécessite une étude approfondie de ses propriétés. C'est la théorie des arbres finis ou infinis !

Supposons tout au long de cette sous-section que les variables de V soient ordonnées par un ordre total, strict, dense et sans extrêmes, noté $\succ$.

Théorie Eq de l'égalité

Soit Eq une théorie munie d'une signature vide et dont les axiomes sont l'ensemble infini des propositions de la forme suivante

$$(1_n)\ \ \forall x_1 ... \forall x_n \exists y\, \neg(x_1 = y) \wedge ... \wedge \neg(x_n = y), \tag{2.9}$$

où les $x_1 ... x_n$ sont des variables distinctes avec $(n \neq 0)$. La forme (2.9) est appelée *schéma d'axiome* et pour toute valeur de n il existe *un axiome* de Eq. Par exemple la propriété suivante est vraie dans Eq

$$Eq \models \exists x\, \neg(x = y) \wedge \neg(x = z).$$

Cette théorie a pour modèle standard un ensemble infini d'individus tous distincts. Du fait que Eq soit munie d'une signature vide alors $AT = PL$ et donc toutes les équations de Eq sont à plat.

Définition 2.2.3.1 *Soient x et y deux variables distinctes. On appelle* représentant *d'une équation $x = y$ la variable x. Une conjonction α de formules à plat est dite* $(\succ)$-résolue *dans Eq si (1) faux n'est pas une sous-formule de α, (2) toutes les équations de α sont de la forme $x = y$ avec*[3] *$x \succ y$, (3) chaque équation de α a un représentant distinct qui n'apparaît pas dans les autres équations de α.*

Propriété 2.2.3.2 *Toute conjonction de formules à plat est équivalente dans Eq soit à faux, soit à conjonction svls* $(\succ)$*-résolue d'équations.*

Soient x, y et z des variables telles que $x \succ y \succ z$. La conjonction $x = x \wedge y = z$ n'est pas $(\succ)$-résolue car dans l'équation $x = x$ on a $x \not\succ x$. De la même manière, la conjonction $x = y \wedge y = z$ n'est pas $(\succ)$-résolue car y est représentant de l'équation $y = z$ et a une autre occurrence dans l'équation $x = y$. Les conjonctions $vrai$ et $x = z \wedge y = z$ sont $(\succ)$-résolues. Le calcul d'une éventuelle conjonction $(\succ)$-résolue d'équations à partir d'un conjonction de formules à plat dans Eq est évidente[4] et utilise les propriétés usuelles de l'égalité (commutativité, substitution, transitivité...) en remplaçant toute formule de la forme $x = x$ respectivement $\alpha \wedge faux$ par $vrai$ respectivement par $faux$.

Propriété 2.2.3.3 *Soient α une conjonction* $(\succ)$*-résolue d'équations et $\bar{x}$ le vecteur des représentants des équations de α. On a*

1. *$Eq \models \exists! \bar{x}\, \alpha$.*
2. *$Eq \models \exists_{\infty}^{\{faux\}} x\, vrai$.*
3. *Pour tout $x \in var(\alpha)$ on a $Eq \models \exists ? x\, \alpha$.*

Le premier point provient du fait que tous les représentants sont distincts et ont une et une seule occurrence dans α. Ainsi, dans tout modèle de Eq, pour toute instanciation des membres droits des équations de α il existe une et une seule valeur pour les membre gauches des ces équations et donc une et une seule valeur pour les représentants des équations de α. Le deuxième point est une conséquence du schéma d'axiomes (2.9) qui affirme que pour tout ensemble fini de variables distinctes $x_1 ... x_n$, il existe une variable y différente de tous les x_i. Ainsi, dans tout modèle de Eq, il existe une infinité d'individus et par conséquent $Eq \models \exists_{\infty}^{\{faux\}} x\, vrai$. Le troisième point provient du fait que dans une conjonction $(\succ)$-résolue d'équations il n'existe pas de formules de la forme $x = x$ (car $x \not\succ x$). Donc, en utilisant les propriétés de l'égalité, pour tout modèle de Eq et pour toute instanciation des variables de $var(\alpha) - \{x\}$, soit il existe une unique solution pour x, soit il existe une contradiction dans cette instanciation et donc il n'y a pas de valeurs possibles pour x.

Propriété 2.2.3.4 *La théorie Eq est décomposable.*

[3] Rappelons que $\succ$ est une relation d'ordre strict et donc $x \not\succ x$.

[4]

$$(1)\ y = x \Longrightarrow x = y. \quad (2)\ x = y \wedge x = z \Longrightarrow x = y \wedge z = y. \quad (3)\ x = y \wedge z = x \Longrightarrow x = y \wedge z = y.$$
$$(4)\ faux \wedge \alpha \Longrightarrow faux. \quad (5)\ x = x \Longrightarrow vrai.$$

Les règles (1), (2) et (3) sont appliquées uniquement si $x \succ y$.

Preuve. Montrons que Eq satisfait aux conditions de la définition 2.2.1.1. Les ensembles A, A', A'', A''' et $\Psi(u)$ sont choisis de la manière suivante

- A est l'ensemble PL.
- A' est l'ensemble des formules de la forme $\exists\varepsilon\,\alpha'$ où α' est soit une conjonction $(\succ)$-résolue d'équations, soit la formule *faux*.
- A'' est l'ensemble des formules de la forme $\exists\bar{x}''\, vrai$.
- A''' est l'ensemble des formules de la forme $\exists\bar{x}'''\alpha'''$ avec α''' une conjonction $(\succ)$-résolue d'équations et $\bar{x}'''$ le vecteur des représentants des équations de α'''.
- $\Psi(u) = \{faux\}$.

Bien entendu, l'ensemble PL est Eq-fermé et A', A'' et A''' contiennent des formules de la forme $\exists\bar{x}\,\alpha$ avec $\alpha \in PL$.

Montrons que Eq satisfait à la première condition de la définition 2.2.1.1. Soient $\alpha \in PL$ et ψ une formule quelconque. Soit $\bar{x}$ un vecteur de variables. Choisissons un ordre $\succ$ tel que les variables de $\bar{x}$ soient supérieures aux variables libres $\exists\bar{x}\,\alpha$. D'après la propriété 2.2.3.2, deux cas sont à étudier

Soit, la formule α est équivalente à *faux* dans Eq et donc la formule $\exists\bar{x}\alpha \wedge \psi$ est équivalente dans Eq à une formule décomposée de la forme

$$\exists\varepsilon\, faux \wedge (\exists\varepsilon\, vrai \wedge (\exists\varepsilon\, vrai \wedge \psi)).$$

Soit, la formule α est équivalente dans Eq à une conjonction svls β $(\succ)$-résolue d'équations à plat. Soit alors X_r l'ensemble des variables de $\bar{x}$ qui sont des représentants dans les équations de β. Soit X_n l'ensemble des variables de $\bar{x}$ qui ne sont pas des représentants dans les équations de β. La formule $\exists\bar{x}\alpha \wedge \psi$ est équivalente dans Eq à une formule décomposée de la forme

$$\exists\bar{x}'\,\alpha' \wedge (\exists\bar{x}''\,\alpha'' \wedge (\exists\bar{x}'''\,\alpha''' \wedge \psi)), \tag{2.10}$$

avec $\bar{x}' = \varepsilon$. La formule α' contient la conjonction des équations de β dont les représentants n'appartiennent pas à X_r, c'est-à-dire dont les représentants sont libres dans $\exists\bar{x}\beta$. Le vecteur $\bar{x}''$ contient les variables de X_n. La formule α'' est la formule *vrai*. Le vecteur $\bar{x}'''$ contient les variables de X_r. La formule α''' est la conjonction des équations de β dont les représentants appartiennent à X_r. D'après notre construction, il est clair que $\exists\bar{x}'\alpha' \in A'$, $\exists\bar{x}''\alpha'' \in A''$ et $\exists\bar{x}'''\alpha''' \in A'''$. Montrons maintenant que (2.10) et $\exists\bar{x}\alpha \wedge \psi$ sont équivalentes dans Eq. Soient X, X', X'' et X''' les ensembles des variables des vecteurs[5] de $\bar{x}$, $\bar{x}'$, $\bar{x}''$ et $\bar{x}'''$. Si α est équivalente à *faux* dans Eq alors l'équivalence de la décomposition est évidente. Sinon, β est une conjonction $(\succ)$-résolue d'équations et donc d'après notre construction nous avons $X = X' \cup X'' \cup X'''$, $X' \cap X'' = \emptyset$, $X' \cap X''' = \emptyset$, $X'' \cap X''' = \emptyset$, $X' = \emptyset$, pour tout $x_i'' \in X''$ on a $x_i'' \notin var(\alpha')$ et pour tout $x_i''' \in X'''$ on a $x_i''' \notin var(\alpha' \wedge \alpha'')$. Ces propriétés proviennent de la définition d'une conjonction $(\succ)$-résolue d'équations et de l'ordre $\succ$ qui a été choisi tel que les variables quantifiées de $\exists\bar{x}\,\alpha$ soient plus grandes que les variables libres de $\exists\bar{x}\,\alpha$. D'autre part, chaque équation de β apparaît dans $\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha'''$ et chaque équation de $\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha'''$ apparaît dans β et donc $Eq \models \beta \leftrightarrow (\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha''')$. Nous avons montré que les quantifications sont cohérentes et que l'équivalence $Eq \models \beta \leftrightarrow \alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha'''$ est satisfaite. D'après la propriété 2.2.3.2 on a $Eq \models \alpha \leftrightarrow \beta$ et donc la décomposition maintient l'équivalence dans Eq.

Exemple 2.2.3.5 *Décomposons la formule*

$$\exists xyz\, v = w \wedge z = z \wedge z = x \wedge v = y.$$

[5]Bien entendu, si $\bar{x} = \varepsilon$ alors $X = \emptyset$

Choisissons d'abord un ordre $\succ$ tel que $x \succ y \succ z \succ v \succ w$ et transformons maintenant la formule $v = w \wedge z = z \wedge z = x \wedge v = y$ en une conjonction $(\succ)$-résolue d'équations. La formule précédente est équivalente dans Eq à

$$\exists xyz\, v = w \wedge x = z \wedge y = w.$$

Cette formule est équivalente dans Eq à une formule décomposée de la forme

$$\exists \varepsilon\, v = w \wedge (\exists z\, vrai \wedge (\exists xy\, x = z \wedge y = w)).$$

La théorie Eq satisfait à la deuxième condition de la définition 2.2.1.1 d'après le troisième point de la propriété 2.2.3.3 et en utilisant le fait que $\bar{x}' = \varepsilon$. La théorie Eq satisfait à la troisième condition de la définition 2.2.1.1 d'après le second point de la propriété 2.2.3.3. La théorie Eq satisfait à la quatrième condition de la définition 2.2.1.1 d'après le premier point de la propriété 2.2.3.3. La théorie Eq satisfait à la dernière condition de la définition 2.2.1.1 car A' est de la forme $\exists \varepsilon\, \alpha'$ où α' est soit la formule *faux* soit une conjonction $(\succ)$-résolue d'équations. Donc, si $\exists \varepsilon\, \alpha'$ n'a pas de variables libres alors soit $\alpha' = vrai$, soit $\alpha' = faux$.

On a montré que Eq satisfait à toutes les conditions de la définition 2.2.1.1, elle est donc décomposable. □

Notons également que Eq accepte une élimination complète de quantificateurs. En effet, le corollaire 2.2.2.2 illustre ce résultat car pour toute formule $\exists \bar{x}' \alpha' \in A'$ on a $\bar{x}' = \varepsilon$.

Théorie Ra des rationnels ou réels additifs

Soit $F = \{+, -, 0, 1\}$ un ensemble de symboles de fonction d'arités respectives $2, 1, 0, 0$ et $R = \emptyset$ un ensemble de symboles de relation vide. Soit a un entier positif ou nul et $t_1, ..., t_n$ des termes.

Notation 2.2.3.6 *Notons*
- Z, *l'ensemble des entiers.*
- $t_1 + t_2$, *le terme* $+t_1t_2$.
- $t_1 + t_2 + t_3$, *le terme* $+t_1(+t_2t_3)$.
- $0.t_1$, *le terme 0.*
- $-a.t_1$, *le terme* $\underbrace{(-t_1) + \cdots + (-t_1)}_{a}$.
- $a.t_1$, *le terme* $\underbrace{t_1 + \cdots + t_1}_{a}$,
- $\sum_{i=1}^{n} t_i$, *le terme* $\overline{t_1 + t_2 + ... + t_n} + 0$, *où* $\overline{t_1 + t_2 + ... + t_n}$ *est le terme* $t_1 + t_2 + ... + t_n$ *dans lequel nous avons supprimé tous les termes* t_i *qui sont égaux à* 0. *Pour* $n = 0$, *le terme* $\sum_{i=1}^{n} t_i$ *se réduit au terme* 0.

Soit alors Ra la théorie des rationnels ou réels additifs de signature $S = F \cup R$ et dont les axiomes sont l'ensemble infini des propositions de l'une des 8 formes suivantes

1	$\forall x \forall y\, x + y = y + x$,
2	$\forall x \forall y \forall z\, x + (y + z) = (x + y) + z$,
3	$\forall x\, x + 0 = x$,
4	$\forall x\, x + (-x) = 0$,
5_n	$\forall x\, n.x = 0 \rightarrow x = 0$,
6_n	$\forall x\, \exists! y\, n.y = x$,
7	$\forall x \forall y \forall z\, (x = y) \leftrightarrow (x + z = y + z)$,
8	$\neg(0 = 1)$,

avec n un entier non nul. Cette théorie a deux modèles standards : les rationnels Q munis de l'addition et de la soustraction dans Q et les réels R munis de l'addition et de la soustraction dans R.

Définition 2.2.3.7 *On appelle* brique *toute conjonction α de formules de la forme*
- *vrai,*
- *faux,*
- $\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i = a_0.1$ *avec $x_1, ..., x_n$ des variables toutes distinctes et $a_i \in Z$ pour tout $i \in \{0, 1, ..., n\}$*

Définition 2.2.3.8 *Soit α une brique :*
- *On appelle* représentant *d'une équation de α de la forme $\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i = a_0.1$ la plus grande variable x_k suivant l'ordre $\succ$ ($k \in \{1, ..., n\}$) telle que $a_k \neq 0$.*
- *La brique α est dite* $(\succ)$-résolue *dans Ra si (1) chaque équation de α a un représentant distinct qui n'apparaît pas dans les autres équations de α, (2) α ne contient pas de sous-formules de la forme $0 = a_0.1$ ou faux avec $a_0 \in Z$.*

En utilisant les axiomes de Ra nous montrons facilement la propriété suivante

Propriété 2.2.3.9 *Pour tout $k \in \{1, ..., n\}$ on a*

$$Ra \models \sum_{i=1}^{n} a_i.x_i = a_0.1 \leftrightarrow a_k.x_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} (-a_i).x_i + a_0.1$$

Propriété 2.2.3.10 *Toute brique est équivalente dans Ra soit à faux, soit à une brique svls $(\succ)$-résolue.*

Soient x, y et z des variables telles que $x \succ y \succ z$. La brique $2.x + y = (-1).1 \wedge 2.z + y = 0.1$ n'est pas $(\succ)$-résolue car y est représentant de l'équation $2.z + y = 0.1$ et apparaît également dans l'équation $2.x + y = (-1).1$. De la même manière, la brique $x + y = 3.1 \wedge 0 = 0.1$ n'est pas $(\succ)$-résolue car $0 = 0.1$ est sous-formule de α. Les briques *vrai* et $x + 2.z = 4.1 \wedge 3.y + 2.z = 3.1$ sont $(\succ)$-résolues. Le calcul d'une éventuelle brique $(\succ)$-résolue est évident[6] et se fait notamment en utilisant la propriété 2.2.3.9 ainsi qu'une technique usuelle de substitution et de simplification d'équations en remplaçant toute formule de la forme $0 = a_0.1$ par *faux* si $a_0 \neq 0$ et par *vrai* sinon, et toute formule de la forme *faux* $\wedge\, \alpha$ par *faux*.

Propriété 2.2.3.11 *Soient α une brique $(\succ)$-résolue et $\bar{x}$ le vecteur des représentants des équations de α. On a*

1. $Ra \models \exists! \bar{x}\, \alpha$.
2. $Ra \models \exists_{\infty}^{\{faux\}} x\, vrai$.
3. *pour tout $x \in var(\alpha)$ on a* $Ra \models \exists ? x\, \alpha$.

6

(1) $0 = 0.1 \Longrightarrow vrai$. (2) $0 = a_0.1 \Longrightarrow faux$. (3) $faux \wedge \alpha \Longrightarrow faux$.

$$(4)\ \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i.x_i = a_0.1 \wedge \\ \sum_{i=1}^{n} b_i.x_i = b_0.1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i.x_i = a_0.1 \wedge \\ \sum_{i=1}^{n} (b_k a_i - a_k b_i).x_i = (b_k a_0 - a_k b_0).1 \end{bmatrix}.$$

Dans la règle (2) $a_0 \neq 0$. Dans la règle (4) x_k est le représentant de la brique $\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i = a_0.1$ et $b_k \neq 0$.

Le premier point provient du fait que chaque représentant d'une équation de α est distinct et n'apparaît pas dans les autres équations de α. Donc, si l'on transforme chaque équation de la forme $\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i = a_0.1$ en une formule de la forme $a_k.x_k = \sum_{i=1}^{n}(-a_i).x_i + a_0.1$ où x_k est le représentant de cette équation (en utilisant la propriété 2.2.3.9), alors on obtient une conjonction d'équations dont les membres gauches sont distincts et n'ont pas d'occurrences dans les membres droits. Ainsi, dans tout modèle de *Ra*, pour toute instanciation des membres droits de ces équations, il existe une et une seule valeur pour les membres gauches de ces équations et donc une et une seule valeur pour les représentants de ces équations d'après l'axiome 6 de *Ra*. Le deuxième point provient de l'axiome 8 qui affirme que $Ra \models \neg(0 = 1)$. En utilisant alors l'axiome 7, on obtient $Ra \models \neg(0 + 1 = 1 + 1)$. puis $Ra \models \neg(1 = 1 + 1)$ en utilisant l'axiome 3 et finalement $Ra \models \neg(0 = 1 + 1)$ du fait de la transitivité de l'égalité. Si l'on répète alors les étapes précédentes n fois, nous obtenons n distincts individus dans tout modèle de *Ra*. Il existe alors un ensemble infini d'individus dans tout modèle de *Ra* et donc d'après la définition 2.1.2.1, on a $Ra \models \exists_{\infty}^{\{faux\}} x\, vrai$. Le troisième point est évident et provient de la définition de brique ($\succ$)-résolue et de la forme syntaxique des briques. En effet, dans tout modèle de *Ra*, pour toute instanciation des variables de $var(\alpha) - \{x\}$, soit il existe une unique solution pour x, soit il existe une contradiction dans cette instanciation et donc il n'y a pas de valeurs possibles pour x.

Propriété 2.2.3.12 *La théorie Ra est décomposable.*

Preuve. Montrons que *Ra* satisfait aux conditions de la définition 2.2.1.1. Les ensembles A, A', A'', A''' et $\Psi(u)$ sont choisis de la manière suivante

- A est l'ensemble des briques.
- A' est l'ensemble des formules de la forme $\exists\varepsilon\, \alpha'$ où α' est soit une brique ($\succ$)-résolue, soit la formule *faux*.
- A'' est l'ensemble des formules de la forme $\exists\bar{x}''\, vrai$.
- A''' est l'ensemble des formules de la forme $\exists\bar{x}'''\alpha'''$ avec α''' une brique ($\succ$)-résolue et $\bar{x}'''$ le vecteur des représentants des équations de α'''.
- $\Psi(u) = \{faux\}$.

Notons BR l'ensemble des briques. Il est clair que A', A'' et A''' contiennent des formules de la forme $\exists\bar{x}\, \alpha$ avec $\alpha \in BR$. Montrons que BR est *Ra*-fermé. D'après la définition de BR, on a $BR \subseteq AT$. D'autre part, BR est fermé pour la conjonction. De plus, si α est une formule à plat, alors : si α est de la forme *vrai*, *faux*, $x = 0$ ou $x = 1$, c'est déjà une brique[7], sinon les règles suivantes[8] transforment α en une brique

$$\begin{array}{lcl} x = y & \Longrightarrow & x + (-1).y = 0.1 \\ x = -y & \Longrightarrow & x + y = 0.1 \\ x = y + z & \Longrightarrow & x + (-1).y + (-1).z = 0.1 \end{array}$$

Donc, BR est *Ra*-fermé. Montrons maintenant que *Ra* satisfait à la première condition de la définition 2.2.1.1. Soient $\alpha \in BR$ et ψ une formule quelconque. Soit $\bar{x}$ un vecteur de variables. Choisissons un ordre $\succ$ de variables tel que toutes les variables de $\bar{x}$ soient supérieures aux variables libres de $\exists\bar{x}\, \alpha$. D'après la propriété 2.2.3.10, deux cas sont à étudier

Soit, α est équivalente à *faux* dans *Ra* et donc la formule $\exists\bar{x}\alpha \wedge \psi$ est équivalente dans *Ra* à une formule décomposée de la forme

$$\exists\varepsilon\, faux \wedge (\exists\varepsilon\, vrai \wedge (\exists\varepsilon\, vrai \wedge \psi)).$$

[7] Les formules $x = 0$ et $x = 1$ sont des briques car d'après la notation 2.2.3.6, les notations $1.x$, 0.1 et 1.1 dénotent les termes x, 0 et 1.

[8] Ces règles sont vraies dans *Ra* et déduites de l'axiomatisation de *Ra*

Soit, α est équivalente dans T à une brique β ($\succ$)-résolue. Soit alors X_r l'ensemble des variables de $\bar{x}$ qui sont des représentants dans les équations de β. Soit X_n l'ensemble des variables de $\bar{x}$ qui ne sont pas des représentants dans les équations de β. La formule $\exists \bar{x} \alpha \wedge \psi$ est équivalente dans T à une formule décomposée de la forme

$$\exists \bar{x}' \, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}'' \, \alpha'' \wedge (\exists \bar{x}''' \, \alpha''' \wedge \psi)), \tag{2.11}$$

avec $\bar{x}' = \varepsilon$. La formule α' contient la conjonction des équations de β dont les représentants n'appartiennent pas à X_r, c'est-à-dire, dont les représentants sont libres dans $\exists \bar{x} \beta$. Le vecteur $\bar{x}''$ contient les variables de X_n. La formule α'' est la formule *vrai*. Le vecteur $\bar{x}'''$ contient les variables de X_r. La formule α''' est la conjonction des équations de β dont les représentants appartiennent à X_r. D'après notre construction, il est clair que $\exists \bar{x}' \alpha' \in A'$, $\exists \bar{x}'' \alpha'' \in A''$ et $\exists \bar{x}''' \alpha''' \in A'''$. Montrons maintenant que (2.11) et $\exists \bar{x} \alpha \wedge \psi$ sont équivalentes dans Ra. Soient X, X', X'' et X''' les ensembles des variables des vecteurs $\bar{x}$, $\bar{x}'$, $\bar{x}''$ et $\bar{x}'''$. Si α est équivalente à *faux* dans Ra alors l'équivalence de la décomposition est évidente. Sinon, β est une brique ($\succ$)-résolue et donc d'après notre construction, nous avons $X = X' \cup X'' \cup X'''$, $X' \cap X'' = \emptyset$, $X' \cap X''' = \emptyset$, $X'' \cap X''' = \emptyset$, $X' = \emptyset$, pour tout $x_i'' \in X''$ on a $x_i'' \notin var(\alpha')$ et pour tout $x_i''' \in X'''$ on a $x_i''' \notin var(\alpha' \wedge \alpha'')$. Ces propriétés proviennent de la définition de brique ($\succ$)-résolue et de l'ordre $\succ$ qui a été choisi tel que les variables quantifiées de $\exists \bar{x} \, \alpha$ soient supérieures aux variables libres de $\exists \bar{x} \, \alpha$. D'autre part, chaque équation de β apparaît dans $\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha'''$ et chaque équation de $\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha'''$ apparaît dans β et donc $Ra \models \beta \leftrightarrow (\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha''')$. Nous avons montré que les quantifications sont cohérentes et que l'équivalence $Ra \models \beta \leftrightarrow \alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha'''$ est satisfaite. D'après la propriété 2.2.3.10 on a $Ra \models \alpha \leftrightarrow \beta$, donc la décomposition maintient l'équivalence dans Ra.

Exemple 2.2.3.13 *Décomposons la formule*

$$\exists xyz \, 2.v + w = 3.1 \wedge v + x = 2.1 \wedge v + x + 2.z = 4.1.$$

Choisissons d'abord l'ordre $\succ$ tel que $x \succ y \succ z \succ v \succ w$ et transformons la brique $2.v + w = 3.1 \wedge v + x = 2.1 \wedge v + x + 2.z = 4.1$ en une brique ($\succ$)-résolue. La formule précédente est équivalente dans Ra à

$$\exists xyz \, 2.v + w = 3.1 \wedge 2.x + (-1).w = 1 \wedge 2.z = 2.1,$$

qui est équivalente dans Ra à la formule décomposée suivante

$$\exists \varepsilon \, 2.v + w = 3.1 \wedge (\exists y \, vrai \wedge (\exists xz \, 2.x + (-1).w = 1 \wedge z = 1)).$$

La théorie Ra satisfait à la deuxième condition de la définition 2.2.1.1 d'après le troisième point de la propriété 2.2.3.11 et en utilisant le fait que $\bar{x}' = \varepsilon$. La théorie Ra satisfait à la troisième condition de la définition 2.2.1.1 d'après le deuxième point de la propriété 2.2.3.11. La théorie Ra satisfait à la quatrième condition de la définition 2.2.1.1 d'après le premier point de la propriété 2.2.3.11. La théorie Ra satisfait à la dernière condition de la définition 2.2.1.1 car A' est de la forme $\exists \varepsilon \, \alpha'$ où α' est soit une brique ($\succ$)-résolue, soit la formule *faux*. Donc, si $\exists \varepsilon \, \alpha'$ ne contient pas de variables libres, alors d'après la définition des briques ($\succ$)-résolues, α' ne contient pas de formules de la forme $0 = a_0 1$ et donc $\exists \varepsilon \, \alpha'$ est soit la formule $\exists \varepsilon \, vrai$, soit la formule $\exists \varepsilon \, faux$.

On a montré que Ra satisfait à toutes les conditions de la définition 2.2.1.1, elle est donc décomposable. □

Notons également que Ra accepte une élimination complète de quantificateurs. En effet, le corollaire 2.2.2.2 illustre ce résultat car pour toute formule $\exists \bar{x}' \alpha' \in A'$ on a $\bar{x}' = \varepsilon$.

2.3 Résolution de propositions dans les théories infini-décomposables

Fixons-nous pour toute cette section une théorie T décomposable munie d'un ensemble F de symboles de fonction et d'un ensemble R de symboles de relation. Les ensembles $\Psi(u)$, A, A', A'' et A''' sont maintenant connus et fixés.

2.3.1 Formule normalisée

Définition 2.3.1.1 *Une formule normalisée φ de profondeur $d \geq 1$ est une formule de la forme*

$$\neg(\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \bigwedge_{i \in I} \varphi_i), \tag{2.12}$$

avec I un ensemble fini (éventuellement vide), $\alpha \in PL$, tous les φ_i sont des formules normalisées de profondeur d_i avec $d = 1 + \max\{0, d_1, ..., d_n\}$ et toutes les variables quantifiées de φ ont des noms distincts et différents des noms des variables libres.

Exemple 2.3.1.2 *Soient f et g deux symboles de fonction 1-aire qui appartiennent à F. La formule*

$$\neg \left[\exists \varepsilon vrai \wedge \left[\begin{array}{l} \neg(\exists x\, y = fx \wedge x = y \wedge \neg(\exists \varepsilon\, y = gx)) \wedge \\ \neg(\exists \varepsilon\, x = z) \end{array} \right] \right]$$

est une formule normalisée de profondeur égale à trois. Les formules $\neg(\exists \varepsilon\ vrai)$ et $\neg(\exists \varepsilon\, faux)$ sont deux formules normalisées de profondeur égale à un.

Propriété 2.3.1.3 *Toute formule φ est équivalente dans la théorie vide*[9] *à une formule normalisée svls de profondeur $d \geq 1$.*

Il est facile de transformer toute formule en une formule normalisée svls ; il suffit par exemple de suivre les étapes suivantes

1. Introduire un supplément d'équations et de variables quantifiées pour transformer les conjonctions de formules atomiques en conjonctions de formules à plat.
2. Exprimer les quantificateurs, constantes et symboles logiques avec $\neg$, $\wedge$ et $\exists$, en utilisant les transformations[10] de sous-formules suivantes

$$\begin{array}{lll} (\varphi \vee \phi) & \Longrightarrow & \neg(\neg\varphi \wedge \neg\phi), \\ (\varphi \rightarrow \phi) & \Longrightarrow & \neg(\varphi \wedge \neg\phi), \\ (\varphi \leftrightarrow \phi) & \Longrightarrow & (\neg(\varphi \wedge \neg\phi) \wedge \neg(\phi \wedge \neg\varphi)), \\ (\forall x\, \varphi) & \Longrightarrow & \neg(\exists x\, \neg\varphi). \end{array}$$

3. Si la formule φ obtenue ne commence pas par le symbole $\neg$, alors la remplacer par $\neg(\exists \varepsilon\ vrai \wedge \neg\varphi)$.
4. Nommer les variables quantifiées par des noms distincts et différents des noms des variables libres.
5. Remonter les quantifications au dessus des conjonctions, c'est-à-dire $\varphi \wedge (\exists \bar{x}\, \psi)$ ou $(\exists \bar{x}\, \psi) \wedge \varphi$, devient $\exists \bar{x}\, \varphi \wedge \psi$ car les variables libres de φ sont différentes de celles de $\bar{x}$.

[9] Donc dans toute théorie.

[10] Ces équivalences sont vraies dans la théorie vide et donc vraies dans toute théorie.

6. Grouper les variables quantifiées dans un vecteur de variables, c'est-à-dire $\exists\bar{x}(\exists\bar{y}\,\varphi)$ ou $\exists\bar{x}\exists\bar{y}\,\varphi$ devient $\exists\overline{xy}\,\varphi$.
7. Insérer des vecteurs vides et des formules de la forme *vrai* pour obtenir la formule normalisée finale en utilisant les transformations suivantes de sous-formules

$$\neg(\bigwedge_{i\in I}\neg\varphi_i) \Longrightarrow \neg(\exists\varepsilon\, \mathit{vrai} \wedge \bigwedge_{i\in I}\neg\varphi_i), \tag{2.13}$$

$$\neg(\alpha \wedge \bigwedge_{i\in I}\neg\varphi_i) \Longrightarrow \neg(\exists\varepsilon\, \alpha \wedge \bigwedge_{i\in I}\neg\varphi_i), \tag{2.14}$$

$$\neg(\exists\bar{x} \bigwedge_{j\in J}\neg\varphi_j) \Longrightarrow \neg(\exists\bar{x}\, \mathit{vrai} \wedge \bigwedge_{j\in J}\neg\varphi_j), \tag{2.15}$$

avec $\alpha \in PL$, I un ensemble fini (éventuellement vide) et J un ensemble fini non vide.

Si la formule de départ ne contient par le symbole logique $\leftrightarrow$, alors cette transformation est linéaire, c'est-à-dire qu'il existe une constante k telle que $n_2 \leq kn_1$, avec n_1 la taille de la formule de départ et n_2 la taille de la formule normalisée finale. Ces transformations ne dépendent pas du fait que la théorie soit décomposable ou pas, ils sont valides dans la théorie vide et donc valides dans toute théorie du premier ordre.

Exemple 2.3.1.4 *Soit $f \in F$ un symbole de fonction d'arité 2. Appliquons les étapes précédentes pour transformer la formule suivante en une formule normalisée équivalente dans T*

$$(fuv = fwu \wedge (\exists x\, u = x)) \vee (\exists u \forall w\, u = fvw).$$

Notons que la formule ne commence pas par le symbole $\neg$ et que les variables u et w sont libres dans $fuv = fwu \wedge (\exists x\, u = x)$ et liées dans $\exists u \forall w\, u = fvw$.
Etape 1 : Transformons les équations en équations à plat. La formule précédente est équivalente dans T à

$$(\exists u_1\, u_1 = fuv \wedge u_1 = fwu \wedge (\exists x\, u = x)) \vee (\exists u \forall w\, u = fvw). \tag{2.16}$$

Etape 2 : Exprimons maintenant le quantificateur $\forall$ en utilisant $\neg$, $\wedge$ et $\exists$. La formule précédente est équivalente dans T à

$$(\exists u_1\, u_1 = fuv \wedge u_1 = fwu \wedge (\exists x\, u = x)) \vee (\exists u \neg(\exists w \neg(u = fvw))).$$

Transformons également les formules contenant le symbole $\vee$ en utilisant $\neg$, $\wedge$ et $\exists$. La formule précédente est équivalente dans T à

$$\neg(\neg(\exists u_1\, u_1 = fuv \wedge u_1 = fwu \wedge (\exists x\, u = x)) \wedge \neg(\exists u \neg(\exists w \neg(u = fvw)))). \tag{2.17}$$

Etape 3 : La formule commence par le symbole $\neg$, alors on passe à l'étape 4.
Etape 4 : Les variables quantifiées u et w dans $(\exists u \neg(\exists w \neg(u = fvw)))$ doivent être renommées. La formule précédente est équivalente dans T à

$$\neg(\neg(\exists u_1\, u_1 = fuv \wedge u_1 = fwu \wedge (\exists x\, u = x)) \wedge \neg(\exists u_2 \neg(\exists w_1 \neg(u_2 = fvw_1)))).$$

Etape 5 : En remontant la quantification $\exists x$, la formule précédente est équivalente dans T à

$$\neg(\neg(\exists u_1 \exists x\, u_1 = fuv \wedge u_1 = fwu \wedge u = x) \wedge \neg(\exists u_2 \neg(\exists w_1 \neg(u_2 = fvw_1)))).$$

Etape 6 : Groupons maintenant les variables x et u_1 dans un quantificateur vectoriel. La formule précédente est équivalente dans T à

$$\neg(\neg(\exists u_1 x \, u_1 = fuv \wedge u_1 = fwu \wedge u = x) \wedge \neg(\exists u_2 \neg(\exists w_1 \neg(u_2 = fvw_1)))).$$

Etape 7 : d'après la règle (2.13), la formule précédente est équivalente dans T à

$$\neg \left[\exists \varepsilon \; vrai \wedge \left[\begin{array}{l} \neg(\exists u_1 x \, u_1 = fuv \wedge u_1 = fwu \wedge u = x) \wedge \\ \neg(\exists u_2 \neg(\exists w_1 \neg(u_2 = fvw_1))) \end{array} \right] \right].$$

En utilisant la règle (2.14), la formule précédente est équivalente dans T à

$$\neg \left[\exists \varepsilon \; vrai \wedge \left[\begin{array}{l} \neg(\exists u_1 x \, u_1 = fuv \wedge u_1 = fwu \wedge u = x) \wedge \\ \neg(\exists u_2 \neg(\exists w_1 \neg(\exists \varepsilon \, u_2 = fvw_1))) \end{array} \right] \right].$$

Finalement, en utilisant la règle (2.15) la formule précédente est équivalente dans T à

$$\neg \left[\exists \varepsilon \; vrai \wedge \left[\begin{array}{l} \neg(\exists u_1 x \, u_1 = fuv \wedge u_1 = fwu \wedge u = x) \wedge \\ \neg(\exists u_2 \; vrai \wedge \neg(\exists w_1 \; vrai \wedge \neg(\exists \varepsilon \, u_2 = fvw_1))) \end{array} \right] \right],$$

Cette formule est une formule normalisée de profondeur égale à quatre.

2.3.2 Formule de travail

Définition 2.3.2.1 *Une* formule de travail *φ de profondeur $d \geq 1$ est une formule de la forme*

$$\neg(\exists \bar{x} \, \alpha \wedge \bigwedge_{i \in I} \varphi_i), \tag{2.18}$$

avec I un ensemble fini (éventuellement vide), $\alpha \in A$, tous les φ_i sont des formules de travail de profondeur d_i avec $d = 1 + \max\{0, d_1, ..., d_n\}$ et toutes les variables quantifiées de φ ont des noms distincts et différents des noms des variables libres.

Propriété 2.3.2.2 *Toute formule est équivalente dans T à une formule de travail svls.*

Preuve. Soit φ une formule quelconque. D'après la propriété 2.3.1.3, la formule φ est équivalente dans T à une formule normalisée ϕ svls de la forme

$$\neg(\exists \bar{x} \, \alpha \wedge \bigwedge_{i \in I} \varphi_i), \tag{2.19}$$

avec $\alpha \in PL$ et tous les φ_i sont des formules normalisées. Du fait que T soit décomposable, alors d'après la définition 2.2.1.1, l'ensemble A est T-fermé, c'est-à-dire (i) $A \subseteq AT$, (ii) A est fermé pour la conjonction, (iii) toute formule à plat est équivalente dans T à une formule qui appartient à A. Du fait que $\alpha \in PL$, alors d'après (iii) α est équivalente dans T à une conjonction β d'éléments de A. D'après (ii) β appartient à A. Donc, la formule (2.19) est équivalente dans T à

$$\neg(\exists \bar{x} \, \beta \wedge \bigwedge_{i \in I} \varphi_i), \tag{2.20}$$

avec $\beta \in A$. En répétant les étapes précédentes récursivement sur chaque sous-formule normalisée φ_i de (2.20) on obtient une formule de travail □

Exemple 2.3.2.3 *Dans la théorie Ra des rationnels ou réels additifs, la formule*

$$\neg\left[\exists\varepsilon\, vrai \wedge \left[\begin{array}{l}\neg(\exists x\, y = -z \wedge z = x + y)\wedge\\ \neg(\exists\, vrai \wedge \neg(\exists w\, vrai \wedge \neg(\exists\varepsilon\, z = w)))\end{array}\right]\right],$$

est une formule normalisée de profondeur égale à quatre qui est équivalente dans Ra à la formule de travail suivante

$$\neg\left[\exists\varepsilon\, vrai \wedge \left[\begin{array}{l}\neg(\exists x\, y + z = 0.1 \wedge z + (-1).x + (-1).y = 0.1)\wedge\\ \neg(\exists\, vrai \wedge \neg(\exists w\, vrai \wedge \neg(\exists\varepsilon\, z + (-1).w = 0.1)))\end{array}\right]\right].$$

Définition 2.3.2.4 *Une formule* résolue *est une formule de travail de la forme*

$$\neg(\exists\bar{x}'\,\alpha' \wedge \bigwedge_{i\in I}\neg(\exists\bar{y}'_i\,\beta'_i)), \tag{2.21}$$

avec I un ensemble fini (éventuellement vide), $\exists\bar{x}'\alpha' \in A'$, $\exists\bar{y}'_i\beta'_i \in A'$ pour tout $i \in I$, α' différent de la formule faux et tous les β'_i sont différents des formules vrai et faux.

Propriété 2.3.2.5 *Soit φ une conjonction de formules résolues sans variables libres. La conjonction φ est soit la formule $\bigwedge_{i\in I}\neg vrai$, soit la formule vrai.*

Preuve. Rappelons d'abord qu'on écrit $\bigwedge_{i\in I}\varphi_i$, et appelons *conjonction* toute formule de la forme $\varphi_{i_1}\wedge\varphi_{i_2}\wedge\ldots\wedge\varphi_{i_n}\wedge vrai$. Soit φ une conjonction de formules résolues sans variables libres. D'après la définition 2.3.2.4, φ est de la forme

$$(\bigwedge_{i\in I}\neg(\exists\bar{x}'_i\alpha'_i \wedge \bigwedge_{j\in J_i}\neg(\exists\bar{y}'_{ij}\beta'_{ij}))) \wedge vrai \tag{2.22}$$

avec

1. I un ensemble fini (éventuellement vide),
2. $(\exists\bar{x}'_i\alpha'_i) \in A'$ pour tout $i \in I$,
3. $(\exists\bar{y}'_{ij}\beta'_{ij}) \in A'$ pour tout $i \in I$ et $j \in J_i$,
4. α'_i différent de la formule *faux* pour tout $i \in I$,
5. β'_{ij} différent des formules *vrai* et *faux* pour tout $i \in I$ et $j \in J_i$.

Du fait que ces formules résolues ne contiennent pas de variables libres et que T soit décomposable, alors d'après le cinquième point de la définition 2.2.1.1 et des conditions 2 et 3 de (2.22) on a :
(*) chaque formule $\exists\bar{x}'_i\alpha'_i$ et chaque formule $\exists\bar{y}'_{ij}\beta'_{ij}$ est soit équivalente à $\exists\varepsilon vrai$, soit la formule $\exists\varepsilon faux$.
D'après (*) et la condition 5 de (2.22), tous les ensembles J_i doivent être vides, donc φ est de la forme

$$(\bigwedge_{i\in I}\neg(\exists\bar{x}'_i\alpha'_i)) \wedge vrai \tag{2.23}$$

D'après (*) et (2.23), la formule φ est de la forme

$$(\bigwedge_{i\in I'}\neg(\exists\varepsilon faux)) \wedge (\bigwedge_{j\in I-I'}\neg(\exists\varepsilon vrai)) \wedge vrai$$

D'après la condition 4 de (2.22), l'ensemble I' doit être vide, donc φ est de la forme

$$(\bigwedge_{i\in I}\neg(\exists\varepsilon\, vrai))\wedge vrai$$

Si $I=\emptyset$ alors φ est la formule *vrai*, sinon, d'après nos suppositions nous ne distinguons pas deux formules qui peuvent être rendues égales en utilisant les transformations de sous-formules suivantes

$$\varphi\wedge\psi\Longrightarrow\psi\wedge\varphi,\quad(\varphi\wedge\psi)\wedge\phi\Longrightarrow\varphi\wedge(\psi\wedge\phi),$$
$$\varphi\wedge vrai\Longrightarrow\varphi,\quad\varphi\vee faux\Longrightarrow\varphi.$$

donc φ est équivalent

$$\bigwedge_{i\in I}\neg vrai$$

□

Propriété 2.3.2.6 *Toute formule résolue est équivalente dans T à une combinaison booléenne svls d'éléments de A'.*

Preuve. Soit φ une formule résolue. D'après la définition 2.3.2.4, la formule φ est de la forme

$$\neg(\exists\bar{x}'\,\alpha'\wedge\bigwedge_{i\in I}\neg(\exists\bar{y}'_i\,\beta'_i)),$$

avec $\exists\bar{x}'\alpha'\in A'$ et $\exists\bar{y}'_i\beta'_i\in A'$ pour tout $i\in I$. Du fait que, $\exists\bar{x}'\alpha'\in A'$ alors d'après la définition 2.2.1.1, $T\models\exists?\bar{x}'\alpha'$ et donc en utilisant le corollaire 2.1.1.4, φ est équivalente dans T à la formule svls suivante

$$\neg((\exists\bar{x}'\,\alpha')\wedge\bigwedge_{i\in I}\neg(\exists\bar{x}'\,\alpha'\wedge(\exists\bar{y}'_i\,\beta'_i))).$$

D'après la définition de formules de travail, toutes les variables quantifiées de φ ont des noms différents de ceux des variables libres, donc la formule précédente est équivalente dans T à la formule svls suivante

$$\neg((\exists\bar{x}'\,\alpha')\wedge\bigwedge_{i\in I}\neg(\exists\bar{x}'\bar{y}'_i\,\alpha'\wedge\beta'_i)).$$

Du fait que $\exists\bar{x}'\alpha'\in A'$ et $\exists\bar{y}'_i\beta'_i\in A'$ pour tout $i\in I$, alors $\alpha'\in A$ et $\beta'_i\in A$. Du fait que A soit T-fermé, alors il est fermé pour la conjonction et donc $\alpha'\wedge\beta'_i\in A$ pour tout $i\in I$. D'après la propriété 2.2.1.2, la formule précédente est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$\neg((\exists\bar{x}'\,\alpha')\wedge\bigwedge_{i\in I}\neg(\exists\bar{y}'_i\,\beta'_i)),$$

avec $\exists\bar{x}'\alpha'\in A'$ et $\exists\bar{y}'_i\beta'_i\in A'$ pour tout $i\in I$. La formule précédente est finalement équivalente dans T à

$$(\neg(\exists\bar{x}'\,\alpha'))\vee\bigvee_{i\in I}(\exists\bar{y}'_i\,\beta'_i).$$

qui est bien une combinaison booléenne svls d'éléments de A'. □

2.3.3 Règles de réécriture

Nous présentons maintenant les règles de réécriture qui transforment une formule de travail de profondeur quelconque en une conjonction svls de formules résolues, équivalente dans T. Appliquer la règle $p_1 \Longrightarrow p_2$ à équivalent de travail p signifie remplacer dans p, une sous-formule p_1 par la formule p_2, en considérant le connecteur $\wedge$ associatif et commutatif.

$$(1) \quad \neg\begin{bmatrix} \exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \\ \neg(\exists \bar{y}\, \mathit{vrai}) \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathit{vrai}$$

$$(2) \quad \neg\begin{bmatrix} \exists \bar{x}\, \mathit{faux} \wedge \varphi \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \mathit{vrai}$$

$$(3) \quad \neg\begin{bmatrix} \exists \bar{x}\, \alpha \wedge \\ \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{y}_i\, \beta_i) \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \neg\begin{bmatrix} \exists \bar{x}'\bar{x}''\, \alpha' \wedge \alpha'' \wedge \\ \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{x}'''\bar{y}_i\, \alpha''' \wedge \beta_i)^* \end{bmatrix}$$

$$(4) \quad \neg\begin{bmatrix} \exists \bar{x}\, \alpha \wedge \\ \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i) \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \neg\begin{bmatrix} \exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge \\ \bigwedge_{i\in I'} \neg(\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i) \end{bmatrix}$$

$$(5) \quad \neg\begin{bmatrix} \exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \\ \neg\begin{bmatrix} \exists \bar{y}'\, \beta' \wedge \\ \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{z}'_i\, \delta'_i) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \neg(\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \neg(\exists \bar{y}'\, \beta')) \wedge \\ \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{x}\bar{y}'\bar{z}'_i\, \alpha \wedge \beta' \wedge \delta'_i \wedge \varphi)^* \end{bmatrix}$$

avec $\alpha \in A$, φ une conjonction de formules de travail et I un ensemble fini (éventuellement vide). Dans la règle (3), la formule $\exists \bar{x}\, \alpha$ est équivalente dans T à une formule décomposée de la forme $\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\, \alpha'' \wedge (\exists \bar{x}'''\, \alpha'''))$ avec $\exists \bar{x}'\, \alpha' \in A'$, $\exists \bar{x}''\, \alpha'' \in A''$, $\exists \bar{x}'''\, \alpha''' \in A'''$ et $\exists \bar{x}'''\, \alpha'''$ différent de $\exists \varepsilon\, \mathit{vrai}$. Tous les β_i appartiennent à A. La formule $(\exists \bar{x}'''\bar{y}_i\, \alpha''' \wedge \beta_i)^*$ est la formule $(\exists \bar{x}'''\bar{y}_i\, \alpha''' \wedge \beta_i)$ dans laquelle nous avons renommé les variables qui figurent dans $\bar{x}'''$ par des noms distincts et différents de ceux des variables libres. Dans la règle (4), la formule $\exists \bar{x}\, \alpha$ n'est pas un élément de A' et est équivalente dans T à une formule décomposée de la forme $\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\, \alpha'' \wedge (\exists \varepsilon\, \mathit{vrai}))$ avec $\exists \bar{x}'\, \alpha' \in A'$ et $\exists \bar{x}''\, \alpha'' \in A''$. Chaque formule $\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i$ est un élément de A'. I' est l'ensemble des $i \in I$ tels que $\exists \bar{y}'_i \beta'_i$ ne contienne aucune occurrence libre de n'importe quelle variable de $\bar{x}''$. Dans la règle (5), $I \neq \emptyset$, $\exists \bar{y}'\, \beta' \in A'$ et $\exists \bar{z}'_i\, \delta'_i \in A'$ pour tout $i \in I$. La formule $(\exists \bar{x}\bar{y}'\bar{z}'_i\, \alpha \wedge \beta' \wedge \delta'_i \wedge \varphi)^*$ est la formule $(\exists \bar{x}\bar{y}'\bar{z}'_i\, \alpha \wedge \beta' \wedge \delta'_i \wedge \varphi)$ dans laquelle nous avons renommé les variables qui figurent dans $\bar{x}$ et $\bar{y}'$ par des noms distincts et différents de ceux des variables libres.

Propriété 2.3.3.1 *Toute application répétée des règles de réécriture précédentes sur une formule de travail φ, se termine et produit une conjonction svls ϕ de formules résolues équivalente à φ dans T.*

Preuve, première partie : L'application des règles se termine. Soit le triplet (n_1, n_2, n_3) où les n_i sont les entiers positifs suivants

1. $n_1 = \alpha(p)$, où la fonction α est définie comme suit
   - $\alpha(\mathit{vrai}) = 0$,
   - $\alpha(\neg(\exists \bar{x}\, a \wedge \varphi)) = 2^{\alpha(\varphi)}$,

– $\alpha(\bigwedge_{i\in I}\varphi_i) = \sum_{i\in I}\alpha(\varphi_i)$,
avec $a \in A$, φ une conjonction de formules de travail et les φ_i des formules de travail. Notons que si $\alpha(p_2) < \alpha(p_1)$ alors $\alpha(p[p_2]) < \alpha(p)$ où $p[p_2]$ est la formule obtenue à partir de p lorsque l'on remplace l'occurrence de la formule p_1 dans p par p_2.

2. $n_2 = \beta(p)$, où la fonction β est définie comme suit
   – $\beta(vrai) = 0$,
   – $\beta(\neg(\exists\bar{x}\, a \wedge \bigwedge_{i\in I}\varphi_i)) = \left\{ \begin{array}{l} 4^{1+\sum_{i\in I}\beta(\varphi_i)} \text{ si } \exists\bar{x}'''\alpha''' \neq \exists\varepsilon\, vrai, \\ 1+\sum_{i\in I}\beta(\varphi_i) \text{ si } \exists\bar{x}'''\alpha''' = \exists\varepsilon\, vrai \end{array} \right\}$,
   avec les φ_i des formules de travail et $T \models (\exists\bar{x}\alpha) \leftrightarrow (\exists\bar{x}'\alpha' \wedge (\exists\bar{x}''\alpha'' \wedge (\exists\bar{x}'''\alpha''')))$.
   Nous montrons que
$$\beta(\neg(\exists\bar{x}\,\alpha \wedge \bigwedge_{i\in I}\neg(\exists\bar{y}_i\,\lambda_i))) > \beta(\neg(\exists\bar{z}\delta \wedge \bigwedge_{i\in I}\neg(\exists w_i\,\gamma_i)))$$
   où la formule $\exists\bar{x}\,\alpha$ est équivalente dans T à une formule décomposée de la forme $\exists\bar{x}'\alpha' \wedge (\exists\bar{x}''\alpha'' \wedge (\exists\bar{x}'''\,\alpha'''))$ avec $\exists\bar{x}'''\,\alpha''' \neq \exists\varepsilon\, vrai$, la formule $\exists\bar{z}\,\delta$ est équivalente dans T à une formule décomposée de la forme $\exists\bar{z}'\,\delta' \wedge (\exists\bar{z}''\,\delta'' \wedge (\exists\varepsilon\, vrai))$ et les λ_i et γ_i sont des éléments de A sans aucune autre restriction.
3. n_3 est le nombre de sous-formules de la forme $\neg(\exists\bar{x}\alpha\wedge\varphi)$ avec $\exists\bar{x}\alpha \notin A'$ et φ une conjonction de formules de travail.

Pour chaque règle, il existe un indice i tel que l'application des règles diminue ou ne change pas la valeur des n_j, avec $1 \leq j < i$, et diminue la valeur de n_i. Cet indice i est égale à : 1 pour les règles (1), (2) et (5), 2 pour la règle (3) et 3 pour la règle (4). A chaque séquence de formules obtenue par application finie des règles de réécriture, on peut associer une suite de triplets (n_1, n_2, n_3) qui est strictement décroissante dans l'ordre lexicographique. Du fait que les n_i soient des entiers positifs, ils ne peuvent pas être négatifs et donc cette suite est une suite finie et l'application de nos règles se termine.

Preuve, deuxième partie : Montrons que pour toute règle de la forme $p \Longrightarrow p'$ on a $T \models p \leftrightarrow p'$ et la formule p' reste une conjonction de formules de travail. Il est clair que les règles (1) et (2) soient correctes dans T.

Correction de la règle (3) :

$$\neg\left[\begin{array}{l} \exists\bar{x}\,\alpha\wedge \\ \bigwedge_{i\in I}\neg(\exists\bar{y}_i\,\beta_i) \end{array}\right] \Longrightarrow \neg\left[\begin{array}{l} \exists\bar{x}'\bar{x}''\,\alpha' \wedge \alpha''\wedge \\ \bigwedge_{i\in I}\neg(\exists\bar{x}'''\bar{y}_i\,\alpha''' \wedge \beta_i)^* \end{array}\right]$$

où la formule $\exists\bar{x}\,\alpha$ est équivalente dans T à une formule décomposée de la forme $\exists\bar{x}'\,\alpha' \wedge (\exists\bar{x}''\,\alpha'' \wedge (\exists\bar{x}'''\,\alpha'''))$ avec $\exists\bar{x}'\,\alpha' \in A'$, $\exists\bar{x}''\,\alpha'' \in A''$, $\exists\bar{x}'''\,\alpha''' \in A'''$ et $\exists\bar{x}'''\,\alpha'''$ différent de $\exists\varepsilon\, vrai$. La formule $(\exists\bar{x}'''\bar{y}_i\,\alpha''' \wedge \beta_i)^*$ est la formule $(\exists\bar{x}'''\bar{y}_i\,\alpha''' \wedge \beta_i)$ dans laquelle nous avons renommé les variables qui figurent dans $\bar{x}'''$ par des noms distincts et différents de ceux des variables libres.

Montrons que cette règle est correcte dans T. D'après les conditions d'application de cette règle, la formule $\exists\bar{x}\,\alpha$ est équivalente dans T à une formule décomposée de la forme $\exists\bar{x}'\,\alpha' \wedge (\exists\bar{x}''\,\alpha'' \wedge (\exists\bar{x}'''\,\alpha'''))$ avec $\exists\bar{x}'\,\alpha' \in A'$, $\exists\bar{x}''\,\alpha'' \in A''$, $\exists\bar{x}'''\,\alpha''' \in A'''$ et $\exists\bar{x}'''\,\alpha'''$ différent de $\exists\varepsilon\, vrai$. Donc, le membre gauche de cette règle est équivalent dans T à la formule

$$\neg(\exists\bar{x}'\,\alpha' \wedge (\exists\bar{x}''\alpha'' \wedge (\exists\bar{x}'''\alpha''' \wedge \bigwedge_{i\in I}\neg(\exists\bar{y}_i\,\beta_i)))).$$

Du fait que $\exists \bar{x}''' \, \alpha''' \in A'''$, alors d'après le quatrième point de la définition 2.2.1.1 on a $T \models \exists! \bar{x}''' \alpha'''$, donc en utilisant le corollaire 2.1.1.7, la formule précédente est équivalente dans T à

$$\neg(\exists \bar{x}' \, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}'' \alpha'' \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{x}''' \alpha''' \wedge (\exists \bar{y}_i \, \beta_i)))).$$

D'après la définition de formule de travail, les variables quantifiées ont des noms différents de ceux des variables libres. Nous pouvons alors remonter les quantifications $\exists \bar{y}_i$. La formule précédente est donc équivalente dans T à

$$\neg(\exists \bar{x}' \, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}'' \alpha'' \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{x}''' \bar{y}_i \, \alpha''' \wedge \beta_i))),$$

qui, en renommant les variables qui figurent dans $\bar{x}$ par des noms distincts et différents de ceux des variables libres, est équivalente dans T à

$$\neg(\exists \bar{x}' \, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}'' \alpha'' \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{x}''' \bar{y}_i \, \alpha''' \wedge \beta_i)^*)).$$

Donc, la règle (3) est correcte dans T.

Correction de la règle (4) :

$$\neg \begin{bmatrix} \exists \bar{x} \, \alpha \wedge \\ \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{y}_i' \, \beta_i') \end{bmatrix} \Longrightarrow \neg \begin{bmatrix} \exists \bar{x}' \, \alpha' \wedge \\ \bigwedge_{i \in I'} \neg(\exists \bar{y}_i' \, \beta_i') \end{bmatrix}$$

où la formule $\exists \bar{x} \, \alpha$ n'est pas un élément de A' et est équivalente dans T à une formule décomposée de la forme $\exists \bar{x}' \, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}'' \, \alpha'' \wedge (\exists \varepsilon \; vrai))$ avec $\exists \bar{x}' \, \alpha' \in A'$ et $\exists \bar{x}'' \, \alpha'' \in A''$. Chaque formule $\exists \bar{y}_i' \, \beta_i'$ est un élément de A'. I' est l'ensemble des $i \in I$ tels que $\exists \bar{y}_i' \beta_i'$ ne contienne aucune occurrence libre de n'importe quelle variable de $\bar{x}''$.

Montrons que cette règle est correcte dans T. D'après les conditions d'application de cette règle, la formule $\exists \bar{x} \, \alpha$ est équivalente dans T à une formule décomposée de la forme $\exists \bar{x}' \, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}'' \, \alpha'' \wedge (\exists \varepsilon \; vrai))$ avec $\exists \bar{x}' \, \alpha' \in A'$ et $\exists \bar{x}'' \, \alpha'' \in A''$. De plus, chaque formule $\exists \bar{y}_i' \, \beta_i'$ est un élément de A'. Donc, le membre gauche de cette règle de réécriture est équivalent dans T à la formule

$$\neg(\exists \bar{x}' \, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}'' \alpha'' \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{y}_i' \, \beta_i'))).$$

Notons I_1, l'ensemble des $i \in I$ tels que x_n'' n'ait pas d'occurrences libres dans la formule $\exists \bar{y}_i' \beta_i'$. Ainsi, la formule précédente est équivalente dans T à

$$\neg(\exists \bar{x}' \alpha' \wedge (\exists x_1'' ... \exists x_{n-1}'' \begin{bmatrix} (\bigwedge_{i \in I_1} \neg(\exists \bar{y}_i' \beta_i')) \wedge \\ (\exists x_n'' \, \alpha'' \wedge \bigwedge_{i \in I - I_1} \neg(\exists \bar{y}_i' \beta_i')) \end{bmatrix})). \tag{2.24}$$

Du fait que $\exists \bar{x}'' \alpha'' \in A''$ et $\exists \bar{y}_i' \beta_i' \in A'$ pour tout $i \in I - I_1$, alors d'après la propriété 2.1.2.2 et les conditions 2 et 3 de la définition 2.2.1.1, la formule (2.24) est équivalente dans T à

$$\neg(\exists \bar{x}' \alpha' \wedge (\exists x_1'' ... \exists x_{n-1}'' \, (vrai \wedge \bigwedge_{i \in I_1} \neg(\exists \bar{y}_i' \beta_i')))).$$

En répétant les trois étapes précédentes $(n-1)$ fois, en notant I_k l'ensemble des $i \in I_{k-1}$ tels que $x_{(n-k+1)}''$ n'ait pas d'occurrences libres dans $\exists \bar{y}_i' \beta_i'$, et en utilisant $(n-1)$ fois la propriété 2.1.2.3, la formule précédente est équivalente dans T à

$$\neg(\exists \bar{x}' \alpha' \wedge \bigwedge_{i \in I_n} \neg(\exists \bar{y}_i' \beta_i')).$$

Donc, la règle (4) est correcte dans T.

Correction de la règle (5) :

$$\neg \begin{bmatrix} \exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \\ \neg \begin{bmatrix} \exists \bar{y}'\, \beta' \wedge \\ \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{z}'_i\, \delta'_i) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \neg(\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \neg(\exists \bar{y}'\, \beta')) \wedge \\ \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{x} \bar{y}' \bar{z}'_i\, \alpha \wedge \beta' \wedge \delta'_i \wedge \varphi)^* \end{bmatrix},$$

où $I \neq \emptyset$ et les formules $\exists \bar{y}'\, \beta'$ et $\exists \bar{z}'_i\, \delta'_i$ sont des éléments de A' pour tout $i \in I$. La formule $(\exists \bar{x} \bar{y}' \bar{z}'_i\, \alpha \wedge \beta' \wedge \delta'_i \wedge \varphi)^*$ est la formule $(\exists \bar{x} \bar{y}' \bar{z}'_i\, \alpha \wedge \beta' \wedge \delta'_i \wedge \varphi)$ dans laquelle nous avons renommé les variables quantifiées par des noms distincts et différents de ceux des variables libres.

Montrons que cette règle est correcte dans T. Du fait que $\exists \bar{y}' \beta' \in A'$, alors d'après le second point de la définition 2.2.1.1, on a $T \models \exists ? \bar{y}' \beta'$, donc en utilisant le corollaire 2.1.1.4, la formule précédente est équivalente dans T à

$$\neg \begin{bmatrix} \exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \\ \neg \left[\ (\exists \bar{y}'\, \beta') \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{y}'\, \beta' \wedge (\exists \bar{z}'_i\, \delta'_i))\ \right] \end{bmatrix}.$$

D'après la définition de formule de travail, les variables quantifiées ont des noms différents de ceux des variables libres et donc on peut remonter les quantifications $\exists \bar{z}_i$. Ainsi, la formule précédente est équivalente dans T à

$$\neg \begin{bmatrix} \exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \\ \neg \left[\ (\exists \bar{y}'\, \beta') \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{y}' \bar{z}'_i\, \beta' \wedge \delta'_i)\ \right] \end{bmatrix},$$

donc à

$$\neg \begin{bmatrix} \exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \\ \left[\ (\neg(\exists \bar{y}'\, \beta')) \vee \bigvee_{i \in I} (\exists \bar{y}' \bar{z}'_i\, \beta' \wedge \delta'_i)\ \right] \end{bmatrix}.$$

Après avoir distribué le $\wedge$ sur les $\vee$ et remonté les quantifications $\exists \bar{y}' \bar{z}'_i$, on obtient

$$\neg \begin{bmatrix} (\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \neg(\exists \bar{y}'\, \beta')) \vee \\ \bigvee_{i \in I} (\exists \bar{x} \bar{y}' \bar{z}'_i\, \alpha \wedge \varphi \wedge \beta' \wedge \delta'_i), \end{bmatrix},$$

qui est équivalente dans T à

$$\begin{bmatrix} \neg(\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \neg(\exists \bar{y}'\, \beta')) \wedge \\ \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{x} \bar{y}' \bar{z}'_i\, \alpha \wedge \varphi \wedge \beta' \wedge \delta'_i) \end{bmatrix}. \tag{2.25}$$

Afin de satisfaire la définition de formules de travail, nous devons renommer les variables de $\bar{x}$ et $\bar{y}'$ par des noms distincts et différents de ceux des variables libres. Soit alors

$(\exists \bar{x} \bar{y}' \bar{z}'_i\, \alpha \wedge \varphi \wedge \beta' \wedge \delta'_i)^*$ la formule $(\exists \bar{x} \bar{y}' \bar{z}'_i\, \alpha \wedge \varphi \wedge \beta' \wedge \delta'_i)$ dans laquelle nous avons renommé les variables qui figurent dans $\bar{x}\bar{y}$ et $\bar{y}'$ par des noms distincts et différents de ceux des variables libres. Donc, la formule (2.25) est équivalente dans T à

$$\begin{bmatrix} \neg(\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \neg(\exists \bar{y}'\, \beta')) \wedge \\ \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{x} \bar{y}' \bar{z}'_i\, \alpha \wedge \varphi \wedge \beta' \wedge \delta'_i)^* \end{bmatrix}.$$

La règle (5) est donc correcte dans T.

Preuve, troisième partie : Toute application finie des règles sur une formule de travail produit une conjonction svls de formules résolues.

Rappelons qu'on écrit $\bigwedge_{i\in I}\varphi_i$, et appelons *conjonction*, toute formule de la forme $\varphi_{i_1}\wedge\varphi_{i_2}\wedge ... \wedge\varphi_{i_n}\wedge \mathit{vrai}$. En particulier, pour $I=\emptyset$, la conjonction $\bigwedge_{i\in I}\varphi_i$ se réduit à la formule *vrai*. De plus, nous ne distinguons pas deux formules qui peuvent être rendues égales en utilisant les transformations de sous-formules suivantes

$$\varphi\wedge\psi\Longrightarrow\psi\wedge\varphi,\ \ (\varphi\wedge\psi)\wedge\phi\Longrightarrow\varphi\wedge(\psi\wedge\phi),$$
$$\varphi\wedge \mathit{vrai}\Longrightarrow\varphi,\ \ \varphi\vee \mathit{faux}\Longrightarrow\varphi.$$

Montrons d'abord que toute substitution d'une sous-formule de travail dans une conjonction de formules de travail par une conjonction de formules de travail produit toujours une conjonction de formules de travail. Soit alors $\bigwedge_{i\in I}\varphi_i$ une conjonction de formules de travail. Soit φ_k avec $k\in I$ un élément de cette conjonction et dont la profondeur est notée d_k. Deux cas sont possibles

1. Soit, on remplace φ_k par une conjonction de formules de travail. Dans ce cas, soit $\bigwedge_{j\in J_k}\phi_j$ une conjonction de formules de travail équivalente à φ_k dans T. La conjonction de formules de travail $\bigwedge_{i\in I}\varphi_i$ est équivalente dans T à

$$(\bigwedge_{i\in I-\{k\}}\varphi_i)\wedge(\bigwedge_{j\in J_k}\phi_j)$$

qui bien entendu est une conjonction de formules de travail.

2. Soit, on remplace une sous-formule de travail de φ_k par une une conjonction de formules de travail. Dans ce cas, soit ϕ une sous-formule de travail de φ_k de profondeur $d_\phi<d_k$ (donc ϕ est différente de φ_k). Ainsi, φ_k a au moins une sous-formule de travail[11] de la forme

$$\neg(\exists\bar{x}\alpha\wedge(\bigwedge_{l\in L}\psi_l)\wedge(\phi)),$$

où L est un ensemble fini (éventuellement vide) et tous les ψ_l sont des formules de travail. Soit alors $\bigwedge_{j\in J}\phi_j$ une conjonction de formules de travail équivalente à ϕ dans T. La sous-formule de travail précédente est donc équivalente dans T à

$$\neg(\exists\bar{x}\alpha\wedge(\bigwedge_{l\in L}\psi_l)\wedge(\bigwedge_{j\in J}\phi_j)),$$

qui bien entendu est une formule de travail. Ainsi, φ_k est équivalente dans T à une formule de travail et donc $\bigwedge_{i\in I}\varphi_i$ est équivalente dans T à une conjonction de formules de travail.

De 1 et 2 on déduit que (i) toute substitution d'une sous-formule de travail dans une conjonction de formules de travail par une conjonction de formules de travail produit toujours une conjonction de formules de travail.

D'autre part, du fait que chaque règle transforme une formule de travail en une conjonction de formules de travail, alors d'après (i) toute application finie des règles sur une formule de travail produit une conjonction de formules de travail. Montrons maintenant que chacune de ces formules de travail est résolue.

Soit φ une formule de travail. D'après ce qu'on vient de démontrer, toute application finie de nos règles sur une formule de travail produit une conjonction ϕ de formules de travail. Supposons alors qu'aucune règle ne puisse s'appliquer et que l'une des formules de travail de ϕ ne soit pas

[11]En considérant que l'ensemble des sous-formules de n'importe quelle formule φ contient également la formule φ.

résolue. Soit alors ψ cette formule. Deux cas sont à étudier
Cas 1 : ψ est une formule de travail de profondeur strictement supérieure à deux. Donc, ψ a au moins une sous-formule de la forme

$$\neg\left[\begin{array}{l}\exists\bar{x}\,\alpha\wedge\psi_1\wedge\\ \neg\left[\ \exists\bar{y}\,\beta\wedge\bigwedge_{i\in I}\neg(\exists\bar{z}_i\,\delta_i)\ \right]\end{array}\right]$$

où ψ_1 est une conjonction de formules de travail, I est un ensemble fini et non vide et α, β et δ_i sont des éléments de A pour tout $i\in I$. Soit $(\exists\bar{y}'\beta'\wedge(\exists\bar{x}''\beta''\wedge(\exists\bar{y}'''\beta''')))$ la formule décomposée dans T de $\exists\bar{y}\beta$ et soit $(\exists\bar{z}_i'\delta_i'\wedge(\exists\bar{z}_i''\delta_i''\wedge(\exists\bar{z}_i'''\delta_i''')))$ la formule décomposée dans T de $\exists\bar{z}_i\delta_i$. Si $\exists\bar{y}'''\beta'''$ n'est pas la formule $\exists\varepsilon\,vrai$, alors la règle (3) peut encore s'appliquer ce qui contredit notre supposition. Donc, supposons que

$$\exists\bar{y}'''\beta'''=\exists\varepsilon\,vrai. \tag{2.26}$$

S'il existe $k\in I$ tel que $\exists\bar{z}_k'''\delta_k'''$ ne soit pas la formule $\exists\varepsilon\,vrai$, alors la règle (3) peut encore s'appliquer (avec $I=\emptyset$) ce qui contredit notre supposition. Supposons alors que

$$\exists\bar{z}_i'''\delta_i'''=\exists\varepsilon\,vrai, \tag{2.27}$$

pour tout $i\in I$. S'il existe $k\in I$ tel que $\exists\bar{z}_k\delta_k$ ne soit pas un élément de A', alors du fait qu'on ait (2.27), la règle (4) peut encore s'appliquer (avec $I=\emptyset$) ce qui contredit notre supposition. Supposons alors que

$$\exists\bar{z}_i\delta_i\in A', \tag{2.28}$$

pour tout $i\in I$. Si $\exists\bar{y}\beta$ n'est pas un élément de A', alors du fait qu'on ait (2.26) et (2.28), la règle (4) peut encore s'appliquer ce qui contredit notre supposition. Supposons alors que

$$\exists\bar{y}\beta\in A'. \tag{2.29}$$

Du fait qu'on ait (2.28) et (2.29), alors la règle (5) peut encore s'appliquer ce qui contredit toutes nos suppositions.
Cas 2 : ψ est une formule de travail de la forme

$$\neg(\exists\bar{x}\,\alpha\wedge\bigwedge_{i\in I}\neg(\exists\bar{y}_i\,\beta_i))$$

et au moins une des propriétés suivantes est vérifiée

1. α est la formule *faux*,
2. il existe $k\in I$ tel que β_k est la formule *vrai* ou *faux*,
3. il existe $k\in I$ tel que $\exists\bar{y}_k\beta_k\notin A'$,
4. $\exists\bar{x}\alpha\notin A'$.

Si la condition (1) est vraie alors la règle (2) peut encore s'appliquer, ce qui contredit notre supposition. Si la condition (2) est vraie alors les règles (1) et (2) peuvent encore s'appliquer, ce qui contredit notre supposition. Si la condition (3) est vraie alors les règles (3) ou (4) (avec $I=\emptyset$) peuvent encore s'appliquer, ce qui contredit notre supposition. Si la condition (4) est vraie alors d'après le point précédent $\exists\bar{y}_i\beta_i\in A'$ pour tout $i\in I$ et donc les règles (3) ou (4) peuvent s'appliquer ce qui contredit notre supposition.

Des cas 1 et 2, notre supposition est fausse, donc ψ est une formule résolue et par conséquent ϕ est une conjonction de formules résolues. □

2.3.4 Algorithme de résolution de propositions

Ayant une proposition ψ, la résolution ou décision de ψ dans T se fait de la manière suivante

1. Transformer la formule ψ en une formule normalisée, puis en une formule de travail φ svls et équivalente à ψ dans T.
2. Appliquer les règles de réécriture précédentes sur φ autant de fois que possible. A la fin on obtient une conjonction ϕ de formules résolues.

Du fait que la transformation de la proposition ψ en formule de travail φ soit svls, alors φ est également une proposition. D'après la propriété 2.3.3.1, l'application de nos règles sur φ produit une conjonction svls ϕ de formules résolues et donc une conjonction ϕ de formules résolues sans variables libres. D'après la propriété 2.3.2.5, ϕ est soit la formule *vrai*, soit la formule $\bigwedge_{i\in I} \neg vrai$. Du fait que T soit décomposable, elle a au moins un modèle, donc soit $T \models \phi$, soit $T \models \neg\phi$ et par conséquent soit $T \models \psi$, soit $T \models \neg\psi$. Cet algorithme peut très bien s'appliquer sur des formules ayant des variables libres et produit à la fin une conjonction de formules résolues ayant au moins une variable libre. En utilisant alors la propriété 2.3.2.6 on a alors le corollaire suivant

Corollaire 2.3.4.1 *Si T est décomposable alors toute formule est équivalente dans T soit à vrai, soit à faux, soit a une combinaison booléenne d'éléments de A' ayant au moins une variable libre.*

Ce corollaire est une autre preuve de la complétude des théories décomposables. Notons l'importance du fait que T admette au moins un modèle. En effet il ne suffit pas seulement que pour toute proposition ψ on obtienne soit la formule *vrai*, soit la formule $\bigwedge_{i\in I} \neg vrai$; encore faut-il montrer qu'il n'existe pas d'autres décompositions contradictoires, c'est-à-dire d'autre manières pour obtenir une conjonction de formules résolues qui contredit le premier résultat. Le fait que T admette au moins un modèle nous permet d'éviter ce genre de conflit.

Remarque 2.3.4.2 *On peut obtenir une disjonction de formules résolues à la place d'une conjonction de formules résolues. Pour cela, il suffit de lancer l'algorithme sur $\neg\psi$. Soit alors*

$$\bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{x}'_i\, \alpha'_i \wedge \bigwedge_{j\in J_i} \neg(\exists \bar{y}'_{ij}\, \beta'_{ij})),$$

la conjonction de formules résolues obtenue après application des règles de réécriture sur $\neg\psi$. La formule ψ est donc équivalente dans T à

$$\bigvee_{i\in I} (\exists \bar{x}'_i\, \alpha'_i \wedge \bigwedge_{j\in J_i} \neg(\exists \bar{y}'_{ij}\, \beta'_{ij}))$$

qui est bien une disjonction de formules résolues dans T.

2.4 Application à la théorie $\mathcal{T}$ des arbres finis ou infinis

2.4.1 Axiomatisation de $\mathcal{T}$

La théorie $\mathcal{T}$ des arbres finis ou infinis construite sur un ensemble **infini** F de symboles de fonction a pour ensemble d'axiomes l'ensemble infini de propositions de l'une des trois formes suivantes

$\forall\bar{x}\forall\bar{y}$	$\neg f\bar{x} = g\bar{y}$	[1]
$\forall\bar{x}\forall\bar{y}$	$f\bar{x} = f\bar{y} \rightarrow \bigwedge_i x_i = y_i$	[2]
$\forall\bar{x}\exists!\bar{z}$	$\bigwedge_i z_i = t_i[\bar{x}\bar{z}]$	[3]

où f et g sont des symboles de fonction distincts pris dans F, $\bar{x}$ est un vecteur de variables x_i, $\bar{y}$ est un vecteur de variables y_i, $\bar{z}$ est un vecteur de variables z_i toutes distinctes et $t_i[\bar{x}\bar{z}]$ est un terme qui commence par un élément de F suivi de variables prises de $\bar{x}$ ou $\bar{z}$.

T. Dao a montré dans [16] que cette théorie avait pour modèle l'ensemble des arbres[12]finis ou infinis munis d'un ensemble infini de constructeurs[13]d'arbres. D'autre part, $\mathcal{T}$ n'accepte pas de d'élimination complète de quantificateurs. En effet, dans la formule $\exists x\, y = f(x)$ la quantification $\exists x$ ne peut être éliminée.

2.4.2 Propriétés de $\mathcal{T}$

Supposons pour toute cette section que les variables de V soient ordonnées par ordre strict, total, dense et sans extrêmes, noté $\succ$.

Définition 2.4.2.1 *Une conjonction α d'équations à plat est dite* ($\succ$)-résolue *si tous ses membres gauches sont distincts et α ne contient pas d'équations de la forme $x = x$ ou $y = x$, avec x et y des variables telles que $x \succ y$.*

Propriété 2.4.2.2 *Toute conjonction α de formules à plat est équivalente dans $\mathcal{T}$ soit à faux, soit à une conjonction svls ($\succ$)-résolue d'équations à plat.*

Preuve. Pour montrez cette propriété, nous introduisons les règles de réécriture suivantes

$$
\begin{array}{lllll}
(1) & \mathit{faux} \wedge \alpha & \Longrightarrow & \mathit{faux}, \\
(2) & x = fy_1...y_m \wedge x = gz_1...z_n & \Longrightarrow & \mathit{faux}, \\
(3) & x = fy_1...y_n \wedge x = fz_1...z_n & \Longrightarrow & x = fy_1...y_n \wedge \bigwedge_{i\in\{1,...,n\}} y_i = z_i, \\
(4) & x = x & \Longrightarrow & \mathit{vrai} \\
(5) & y = x & \Longrightarrow & x = y \\
(6) & x = y \wedge x = fz_1...z_n & \Longrightarrow & x = y \wedge y = fz_1...z_n \\
(7) & x = y \wedge x = z & \Longrightarrow & x = y \wedge y = z
\end{array}
$$

avec α une formule quelconque et f et g deux symboles de fonction distincts pris dans F. Les règles (5), (6) et (7) sont appliquées uniquement si $x \succ y$. Cette restriction empêche les règles de s'appliquer indéfiniment.

Montrons que toute application répétée de ces règles sur une conjonction α de formules à plat, se termine et produit soit la formule *faux*, soit une conjonction ($\succ$)-résolue d'équations à plat équivalente à α dans $\mathcal{T}$.

Preuve, première partie : L'application des règles se termine. Du fait que les variables qui apparaissent dans nos formules soient ordonnées par la relation " $\succ$ " d'ordre strict, total, dense et sans extrêmes, alors on peut les numéroter par des entiers positifs tels que

$$x \succ y \leftrightarrow no(x) > no(y),$$

[12]Pour définir formellement un arbre a construit sur un ensemble E, d'éléments de diverses arités, on définit d'abord un *nœud* comme un mot construit sur l'ensemble des entiers positifs. Un tel arbre a est alors une application de type $N \to E$, où N est un ensemble non vide de nœuds dont chaque élément $i_1 \dots i_k$ (avec $k \geq 0$) respecte deux conditions : (1) si $k > 0$ alors $i_1 \dots i_{k-1} \in N$, (2) si l'arité de $a(i_1 \dots i_k)$ est n alors, l'ensemble des nœuds de N de la forme $i_1 \dots i_k i_{k+1}$ s'obtient en donnant à i_{k+1} les valeurs $1, \dots, n$.

[13]Formellement, l'opération *de construction* associée au symbole n-aire f de F est l'application $(a_1, \dots, a_n) \mapsto a$, où les a_i sont des arbres quelconques et a est l'arbre défini comme suit à partir des a_i et de leurs ensembles E_i de nœuds : l'ensemble E de nœuds de a est $\{\varepsilon\} \cup \{ix \,|\, x \in E_i \text{ et } i \in 1..n\}$ et, pour tout $x \in E$, si $x = \varepsilon$, on a $a(x) = f$ et si x est de la forme iy, avec i un entier, $a(x) = a_i(y)$.

où $no(x)$ est le numéro associé à la variable x. Soit le quadruplait (n_1, n_2, n_3, n_4) où les n_i's sont les entiers positifs suivants

- n_1 est le nombre d'occurrences de sous-formules de la forme $x = fy_1...y_n$, avec $f \in F$,
- n_2 est le nombre d'occurrences de formules atomiques,
- n_3 est la somme des $no(x)$ pour toute occurrence d'une variable x,
- n_4 est le nombre d'occurrences de formules de la forme $y = x$, avec $x \succ y$.

pour chaque règle, il existe un indice i tel que l'application de cette règle diminue ou ne change pas la valeur des n_j avec $1 \leq j < i$, et diminue la valeur de n_i. L'indice i est égal à : 2 pour la règle (1), 1 pour les règles (2) et (3), 3 pour les règles (4), (6) et (7), 4 pour la règle (5). A chaque séquence de formules obtenue par application finie de nos règles, on peut associer une suite (n_1, n_2, n_3, n_4) qui est strictement décroissante dans l'ordre lexicographique. Du fait que ces n_i's soient des entiers positifs, ils ne peuvent pas être négatifs, donc cette suite est finie et l'application de nos règles se termine.

Preuve, deuxième partie : Les règles préservent l'équivalence dans $\mathcal{T}$. La règle (1) est évidente dans $\mathcal{T}$. La règle (2) préserve l'équivalence dans $\mathcal{T}$ d'après l'axiome 1. La règle (3) préserve l'équivalence dans $\mathcal{T}$ d'après l'axiome 2. Les règles (4), (5), (6) et (7) sont évidentes dans $\mathcal{T}$.

Preuve, troisième partie : L'application des règles se termine par *faux* ou par une conjonction $(\succ)$-résolue d'équations à plat. Supposons que l'application des règles sur une conjonction α de formules à plat se termine par une formule β et au moins une des propriétés suivantes soit satisfaite

1. β n'est pas la formule *faux* et contient au moins une sous-formule de la forme *faux*,
2. β contient deux équations avec le même membre gauche,
3. β contient des équations de la forme $x = x$ ou $y = x$ avec $x \succ y$.

Si la condition 1 est vraie alors la règle (1) peut encore s'appliquer, ce qui contredit notre supposition. Si la condition 2 est vraie alors les règles (2), (3), (6) et (7) peuvent encore s'appliquer, ce qui contredit notre supposition. Si la condition 3 est vraie alors les règles (4) et (5) peuvent encore s'appliquer, ce qui contredit notre supposition. Donc la formule β est soit la formule *faux*, soit une conjonction $(\succ)$-résolue d'équations à plat. □

Introduisons maintenant la notion de *variable accessible* et *équation accessible.*

Définition 2.4.2.3 *Une variable u est dite* accessible *dans $\exists \bar{x}\alpha$ avec $\alpha \in A$ si u est une variable libre dans $\exists \bar{x}\alpha$, ou α a une sous-formule de la forme $y = t(u)$ avec $t(u)$ un terme contenant u et y est une variable accessible. Dans le dernier cas, l'équation $y = t(u)$ est dite accessible dans $\exists \bar{x}\alpha$.*

Exemple 2.4.2.4 *dans la formule*

$$\exists uvw\, z = fuv \wedge v = gvu \wedge w = fuv,$$

les équations $z = fuv$ et $v = gvu$ ainsi que les variables z, u et v sont accessibles. Par contre, l'équation $w = fuv$ et la variable w ne le sont pas.

D'après les axiomes [1] et [2] de $\mathcal{T}$ on a la propriété suivante

Propriété 2.4.2.5 *Soit α une conjonction d'équations à plat. Si toutes les variables de $\bar{x}$ sont accessibles dans $\exists \bar{x}\, \alpha$ alors $\mathcal{T} \models \exists ? \bar{x}\, \alpha$.*

D'après l'axiome 3 on a

Propriété 2.4.2.6 *Soit α une conjonction $(\succ)$-résolue d'équations à plat et $\bar{x}$ le vecteur des membres gauches des équations de α. On a $\mathcal{T} \models \exists ! \bar{x}\, \alpha$.*

2.4.3 $\mathcal{T}$ est infini-décomposable

Théorème 2.4.3.1 *$\mathcal{T}$ est une théorie infini-décomposable.*

Preuve. Montrons que $\mathcal{T}$ satisfait aux conditions de la définition 2.2.1.1.

Choix des ensembles $\Psi(u)$, A, A', A'' et A'''

Soit F_0 l'ensemble des constantes de F. Les ensembles $\Psi(u)$, A, A', A'' et A''' sont choisis de la manière suivante

- $\Psi(u)$ est l'ensemble $\{faux\}$ si $F - F_0 = \emptyset$, sinon il contient des formules de la forme $\exists \bar{y}\, u = f\bar{y}$ avec $f \in F - F_0$,
- A est l'ensemble PL.
- A' est l'ensemble des formules de la forme $\exists \bar{x}'\alpha'$ où
  - α' est soit la formule *faux*, soit une conjonction $(\succ)$-résolue d'équations à plat où l'ordre $\succ$ est tel que toutes les variables de $\bar{x}'$ soient supérieures aux variables libres de $\exists \bar{x}'\alpha'$,
  - toutes les variables de $\bar{x}'$ et toutes les équations de α' sont accessibles dans $\exists \bar{x}'\alpha'$,
- A'' est l'ensemble des formules de la forme $\exists \bar{x}''\, vrai$,
- A''' est l'ensemble des formules de la forme $\exists \bar{x}'''\alpha'''$ où α''' est une conjonction $(\succ)$-résolue d'équations à plat et $\bar{x}'''$ est le vecteur des membres gauches des équations de α'''.

Bien entendu PL est $\mathcal{T}$-fermé et A', A'' et A''' contiennent bien des formules de la forme $\exists \bar{x}\, \alpha$ avec $\alpha \in PL$. Montrons maintenant que $\mathcal{T}$ satisfait aux cinq conditions de la définition 2.2.1.1

$\mathcal{T}$ satisfait à la première condition de la définition 2.2.1.1

Montrons que toute formule de la forme $\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \psi$, avec $\alpha \in PL$ et ψ une formule quelconque, est équivalente dans $\mathcal{T}$ à une formule svls de la forme

$$\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\, \alpha'' \wedge (\exists \bar{x}'''\, \alpha''' \wedge \psi)), \tag{2.30}$$

avec $\exists \bar{x}'\, \alpha' \in A'$, $\exists \bar{x}''\, \alpha'' \in A''$ et $\exists \bar{x}'''\, \alpha''' \in A'''$.

Choisissons un ordre $\succ$ tel que toutes les variables de $\bar{x}$ soient supérieures aux variables libres de $\exists \bar{x}\alpha$. D'après la propriété 2.4.2.2 deux cas sont à étudier

Soit, α est équivalente à *faux* dans $\mathcal{T}$. Donc, $\bar{x}' = \bar{x}'' = \bar{x}''' = \varepsilon$, $\alpha' = faux$ et $\alpha'' = \alpha''' = vrai$.

Soit, α est équivalente à une conjonction $(\succ)$-résolue β d'équations à plat. Soit alors X l'ensemble des variables du vecteur $\bar{x}$. Soit Y_{acc} l'ensemble des variables accessibles dans $\exists \bar{x}\beta$. Soit Mbg l'ensemble des variables qui apparaissent dans un membre gauche d'une équation de β. On a

- $\bar{x}'$ contient les variables de $X \cap Y_{acc}$.
- $\bar{x}''$ contient les variables de $(X - Y_{acc}) - Mbg$.
- $\bar{x}'''$ contient les variables de $(X - Y_{acc}) \cap Mbg$.
- α' est la conjonction des équations accessibles de $\exists \bar{x}\beta$.
- α'' est la formule *vrai*.
- α''' est la conjonction des équations inaccessibles de $\exists \bar{x}\beta$.

D'après notre construction, il est clair que $\exists \bar{x}'\alpha' \in A'$, $\exists \bar{x}''\alpha'' \in A''$ et $\exists \bar{x}'''\alpha''' \in A'''$. Montrons maintenant que (2.30) et $\exists \bar{x}\alpha \wedge \psi$ sont équivalentes dans $\mathcal{T}$. Soient X', X'' et X''' les ensembles des variables des vecteurs $\bar{x}'$, $\bar{x}''$ et $\bar{x}'''$. Si α est équivalente à *faux* dans $\mathcal{T}$ alors l'équivalence de la décomposition est évidente. Sinon, β est une conjonction d'équations à plat et donc d'après notre construction on a $X = X' \cup X'' \cup X'''$, $X' \cap X'' = \emptyset$, $X' \cap X''' = \emptyset$, $X'' \cap X''' = \emptyset$, pour tout $x''_i \in X''$ on a $x''_i \notin var(\alpha')$ et pour tout $x'''_i \in X'''$ on a $x'''_i \notin var(\alpha' \wedge \alpha'')$. De plus, chaque équation de β apparaît dans $\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha'''$ et chaque équation de $\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha'''$ apparaît dans β et donc $\mathcal{T} \models \beta \leftrightarrow (\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha''')$. On a montré que les quantifications sont cohérentes et que l'équivalence $\mathcal{T} \models \beta \leftrightarrow \alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha'''$ est satisfaite. D'après la propriété 2.4.2.2 on a $\mathcal{T} \models \alpha \leftrightarrow \beta$, par conséquent, la décomposition maintient l'équivalence dans $\mathcal{T}$.

Exemple 2.4.3.2 *Décomposons dans $\mathcal{T}$ la formule suivante φ*

$$\exists xyv\, z = fxy \wedge z = fxw \wedge v = fz.$$

Du fait que w et z soient libres dans φ alors l'ordre $\succ$ est choisi tel que

$$x \succ y \succ v \succ w \succ z.$$

Notons que les variables quantifiées sont supérieures aux variables libres. D'après la propriété 2.4.2.2, la formule φ est équivalente dans $\mathcal{T}$ à la formule $(\succ)$-résolue ψ suivante

$$\exists xyv\, z = fxy \wedge y = w \wedge v = fz.$$

Du fait que les variables z, x, y, w ainsi que les équations $z = fxy$ et $y = w$ soient accessibles dans ψ, alors ψ est équivalente dans $\mathcal{T}$ à la formule décomposée suivante

$$\exists xy\, z = fxy \wedge y = w \wedge (\exists \varepsilon\, vrai \wedge (\exists v\, v = fz)).$$

Notons que $(\exists xy\, z = fxy \wedge y = w) \in A'$, $(\exists \varepsilon\, vrai) \in A''$ et $(\exists v\, v = fz) \in A'''$.

$\mathcal{T}$ satisfait à la deuxième condition de la définition 2.2.1.1

Montrons que si $\exists \bar{x}'\alpha' \in A'$ alors $\mathcal{T} \models \exists ?\bar{x}'\alpha'$. Du fait que $\exists \bar{x}'\alpha' \in A'$ et d'après le choix de l'ensemble A', soit, α' est la formule *faux* et donc on a $\mathcal{T} \models \exists ?\bar{x}'\alpha'$, soit, α' est une conjonction $(\succ)$-résolue d'équations à plat où les variables de $\bar{x}'$ sont toutes accessibles dans $\exists \bar{x}'\alpha'$. Ainsi, d'après la propriété 2.4.2.5 on a $\mathcal{T} \models \exists ?\bar{x}'\alpha'$.

Montrons maintenant que pour toute variable libre y dans $\exists \bar{x}'\alpha'$ on a $\mathcal{T} \models \exists ?y\bar{x}'\,\alpha'$ ou bien, il existe $\psi(u) \in \Psi(u)$ tel que $\mathcal{T} \models \forall y\, (\exists \bar{x}'\,\alpha') \rightarrow \psi(y)$. Soit alors y une variable libre de $\exists \bar{x}'\alpha'$. Bien entendu, α' ne peut être la formule *faux*. Donc, quatre cas sont à étudier

Si y apparaît dans une sous-formule de α' de la forme $y = t(\bar{x}', \bar{z}', y)$, avec $\bar{z}'$ l'ensemble des variables libres de $\exists \bar{x}'\alpha'$ qui sont différentes de y et avec $t(\bar{x}', \bar{z}', y)$ un terme qui commence par un élément de $F - F_0$ suivi de variables prises dans $\bar{x}'$ ou $\bar{z}'$ ou $\{y\}$, alors la formule $\exists \bar{x}'\alpha'$ implique dans $\mathcal{T}$ la formule $\exists \bar{x}'\, y = t(\bar{x}', \bar{z}', y)$, qui implique dans $\mathcal{T}$ la formule $\exists \bar{x}'\bar{z}'w\, y = t(\bar{x}', \bar{z}', w)$, où $y = t(\bar{x}', \bar{z}', w)$ est la formule $y = t(\bar{x}', \bar{z}', y)$ dans laquelle nous avons remplacé toute occurrence libre de y dans le terme $t(\bar{x}', \bar{z}', y)$ par la variable w. D'après le choix de l'ensemble $\Psi(u)$, la formule $\exists \bar{x}'\bar{z}'w\, u = t(\bar{x}', \bar{z}', w)$ appartient à $\Psi(u)$.

Si y apparaît dans une sous-formule de α' de la forme $y = f_0$ avec $f_0 \in F_0$ alors $\mathcal{T} \models \exists ! y\, y = f_0$ d'après l'axiome 3 de $\mathcal{T}$. Donc (i) $\mathcal{T} \models \exists ? y\, \alpha'$. D'autre part, du fait que α' soit $(\succ)$-résolue, y n'apparaît pas dans les autres membres gauches des équations de α', donc, du fait que les variables de $\bar{x}$ soient accessibles dans $\exists \bar{x}'\alpha'$ (d'après le choix de l'ensemble A'), alors toutes les variables de $\bar{x}'$ restent accessibles dans $\exists \bar{x}'y\, \alpha'$. Par conséquent, en utilisant (i) ainsi que la propriété 2.4.2.5, on obtient $\mathcal{T} \models \exists ?\bar{x}'y\, \alpha'$.

Si y apparaît dans une sous-formule de α' de la forme $y = z$, alors

1. D'après le choix de l'ensemble A', l'ordre $\succ$ est tel que toutes les variables de $\bar{x}'$ soient supérieures aux variables libres de $\exists \bar{x}'\alpha'$.

2. D'après la définition 2.4.2.2 on a $y \succ z$.

De 1 et 2, on déduit que z est une variable libre dans $\exists \bar{x}' \alpha'$. Du fait que α' soit ($\succ$)-résolue, alors y n'apparaît pas dans les autres membres gauche des équations de α'. Donc, du fait que les variables de $\bar{x}$ soient accessibles dans $\exists \bar{x}' \alpha'$ (d'après le choix de l'ensemble A'), alors toutes les variables de $\bar{x}'$ restent accessibles dans $\exists \bar{x}' y\, \alpha'$. De plus, pour chaque valeur de z, il existe au plus une valeur pour y. Par conséquent, en utilisant la propriété 2.4.2.5 on obtient $\mathcal{T} \models \exists ? \bar{x}' y\, \alpha'$.

Si y apparaît uniquement dans les membres gauches des équations de α', alors d'après le choix de l'ensemble A', toutes les variables de $\bar{x}'$ et toutes les équations de α' sont accessibles dans $\exists \bar{x}' \alpha'$. Donc, du fait que y n'ait pas d'occurrences dans un membre gauche d'une équation de α', alors la variable y ainsi que les variables de $\bar{x}'$ sont accessibles dans $\exists \bar{x}' y\, \alpha'$. Par conséquent, en utilisant la propriété 2.4.2.5, on obtient $\mathcal{T} \models \exists ? \bar{x}' y\, \alpha'$. Dans tous les cas $\mathcal{T}$ satisfait à la deuxième condition de la définition 2.2.1.1.

$\mathcal{T}$ satisfait à la troisième condition de la définition 2.2.1.1

Présentons d'abord une propriété vraie dans tout modèle M de $\mathcal{T}$. Cette propriété provient de l'axiomatisation de $\mathcal{T}$ et plus exactement des axiomes 1 et 2.

Propriété 2.4.3.3 *Soit M un modèle de $\mathcal{T}$ et soit f un symbole de fonction pris dans $F - F_0$ (s'il existe). L'ensemble des individus i de M, tel que $M \models \exists \overline{x}\, i = f\overline{x}$, est infini.*

Soit $\exists \bar{x}'' \alpha''$ une formule qui appartient à A''. D'après le choix de l'ensemble A'', cette formule est de la forme $\exists \bar{x}''$ *vrai*. Montrons que pour toute variable x''_j de $\bar{x}''$ on a $\mathcal{T} \models \exists_{\infty}^{\Psi(u)} x_j\ \mathit{vrai}$. Deux cas sont à étudier

Soit, $F - F_0 = \emptyset$, donc $\Psi(u) = \{faux\}$ et F_0 est infini du fait que la théorie est définie sur un ensemble infini de symboles de fonction. D'après l'axiome 2 de conflit de symboles, pour toutes constantes distinctes f et g, correspondent deux individus distincts dans tout modèle de $\mathcal{T}$. Ainsi, du fait que F_0 soit infini, alors il existe un ensemble infini d'individus dans tout modèle de $\mathcal{T}$ et donc d'après la définition 2.1.2.1 on a $\mathcal{T} \models \exists_{\infty}^{\{faux\}} x_j\ \mathit{vrai}$.

Soit, $F - F_0 \neq \emptyset$, donc $\Psi(u)$ contient des formules de la forme $\exists \bar{z}\, u = f\bar{z}$ avec $f \in F - F_0$. Soit alors M un modèle de $\mathcal{T}$. Du fait que la formule $\exists x''_j$ *vrai* ne contienne pas de variables libres, alors elle déjà instanciée. Donc, d'après la définition 2.1.2.1, il suffit de montrer qu'il existe une infinité d'individus i de M qui satisfont à la condition suivante

$$M \models \neg\psi_1(i) \wedge \cdots \wedge \neg\psi_n(i), \tag{2.31}$$

avec $\psi_j(u) \in \Psi(u)$, c'est-à-dire des formules de la forme $\exists \bar{z}\, u = f\bar{z}$ avec $f \in F - F_0$. Deux cas sont à étudier

- Soit, $F - F_0$ est un ensemble fini. Donc F_0 est infini du fait que la théorie est construite sur un ensemble infini F de symboles de fonction. Il existe alors une infinité de constantes f_k différentes des symboles de fonction de tous les $\psi_j(u)$ de (2.31). Donc d'après l'axiome 2 de conflit de symboles, il existe une infinité d'individus i tels que (2.31).
- Soit, $F - F_0$ est un ensemble infini. Il existe alors une formule $\psi(u)^* \in \Psi(u)$ ayant un symbole de fonction différent de ceux des $\psi_j(u)$ de (2.31). D'après la propriété 2.4.3.3, il existe une infinité d'individus i tels que $M \models \psi(i)^*$. Du fait que $\psi(u)^*$ soit différent de tous les $\psi_j(u)$, alors d'après l'axiome 2 de conflit de symboles, il existe une infinité d'individus i tels que $M \models \psi(i)^* \wedge \neg\psi_1(i) \wedge \cdots \wedge \neg\psi_n(i)$ et donc tels que (2.31).

Dans tous les cas $\mathcal{T}$ satisfait à la troisième condition de la définition 2.2.1.1.

$\mathcal{T}$ satisfait à la quatrième condition de la définition 2.2.1.1

Montrons que si $\exists \bar{x}'''\alpha''' \in A'''$ alors $\mathcal{T} \models \exists! \bar{x}''' \alpha'''$. Soit $\exists \bar{x}'''\alpha'''$ un élément de A'''. D'après le choix de l'ensemble A''' et de la propriété 2.4.2.6 nous obtenons immédiatement $\mathcal{T} \models \exists! \bar{x}'''\alpha'''$.

$\mathcal{T}$ satisfait à la cinquième condition de la définition 2.2.1.1

Montrons que si la formule $\exists \bar{x}'\alpha'$ appartient à A' et n'a pas de variables libres alors cette formule est soit la formule $\exists \varepsilon vrai$, soit la formule $\exists \varepsilon faux$. Soit alors $\exists \bar{x}'\alpha'$ une formule sans variables libres qui appartient à A'. On a

1. D'après le choix de l'ensemble A', toutes les variables et équations de $\exists \bar{x}'\alpha'$ sont accessibles dans $\exists \bar{x}'\alpha'$ et α' est soit la formule *faux*, soit une conjonction $(\succ)$-résolue d'équations à plat.
2. Du fait que la formule $\exists \bar{x}'\alpha'$ n'ait pas de variables libres, alors d'après la définition 2.4.2.3, il n'existe ni variables accessibles ni équations accessibles dans $\exists \bar{x}'\alpha'$,

De 1 et 2, on déduit que $\bar{x}'$ est le vecteur vide et α' est soit la formule *vrai* soit la formule *faux*.

On a montré que $\mathcal{T}$ satisfait à toutes les conditions de la définition 2.2.1.1, elle est donc décomposable. □

2.4.4 Résolution de propositions dans $\mathcal{T}$

Exemple 2.4.4.1 *Soit à résoudre la proposition φ_1 suivante*

$$\exists x \forall y\, ((\exists zwv\, y = fz \wedge y = fx \wedge w = gzv) \vee (x = fy \wedge x = fx)).$$

Transformons d'abord cette formule en une formule normalisée équivalente dans $\mathcal{T}$ en utilisant la propriété 2.3.1.3. On obtient alors la formule suivante

$$\neg(\exists \varepsilon\, vrai \wedge \neg(\exists x\, vrai \wedge \neg \begin{bmatrix} \exists y\, vrai \wedge \\ \neg(\exists zwv\, y = fz \wedge y = fx \wedge w = gzv) \wedge \\ \neg(\exists \varepsilon\, x = fy \wedge x = fx) \end{bmatrix})). \tag{2.32}$$

Du fait que $A = PL$ alors cette formule est une formule de travail. Décomposons maintenant la sous-formule

$$\exists zwv\, y = fz \wedge y = fx \wedge w = gzv. \tag{2.33}$$

D'après la section 2.4.3, l'ordre $\succ$ est choisi tel que $z \succ w \succ v \succ y \succ x$. D'après la propriété 2.4.2.2, la sous-formule $y = fz \wedge y = fx \wedge w = gzv$ est équivalente dans $\mathcal{T}$ à la formule $(\succ)$-résolue $y = fz \wedge z = x \wedge w = gzv$, et donc d'après la section 2.4.3 la formule décomposée de (2.33) est

$$\exists z\, y = fz \wedge z = x \wedge (\exists v\, vrai \wedge (\exists w\, w = gzv)).$$

Du fait que $(\exists w\, w = gzv) \neq (\exists \varepsilon\, vrai)$, alors nous pouvons appliquer la règle (3) avec $I = \emptyset$. la formule (2.32) est donc équivalente dans $\mathcal{T}$ à

$$\neg(\exists \varepsilon\, vrai \wedge \neg(\exists x\, vrai \wedge \neg \begin{bmatrix} \exists y\, vrai \wedge \\ \neg(\exists zv\, y = fz \wedge z = x) \wedge \\ \neg(\exists \varepsilon\, x = fy \wedge x = fx) \end{bmatrix})). \tag{2.34}$$

La sous-formule $\exists zv\, y = fz \wedge z = x$ *n'est pas un élément de* A' *et est équivalente dans* $\mathcal{T}$ *à la formule décomposée* $\exists z\, y = fz \wedge z = x \wedge (\exists v\; vrai \wedge (\exists \varepsilon\; vrai))$*. On peut alors appliquer la règle (4) avec* $I = \emptyset$*. Ainsi, la formule (2.34) est équivalente dans* $\mathcal{T}$ *à*

$$\neg(\exists \varepsilon\; vrai \wedge \neg(\exists x\; vrai \wedge \neg \begin{bmatrix} \exists y\; vrai \wedge \\ \neg(\exists z\, y = fz \wedge z = x) \wedge \\ \neg(\exists \varepsilon\, x = fy \wedge x = fx) \end{bmatrix})). \tag{2.35}$$

Décomposons maintenant la sous-formule

$$\exists \varepsilon\, x = fy \wedge x = fx. \tag{2.36}$$

D'après la propriété 2.4.2.2, la sous-formule $x = fy \wedge x = fx$ *est équivalente dans* $\mathcal{T}$ *à la formule* $(\succ)$*-résolue* $x = fy \wedge y = x$*. Ainsi, d'après la section 2.4.3, la formule (2.36) est équivalente dans* $\mathcal{T}$ *à la formule décomposée suivante*

$$\exists \varepsilon\, x = fy \wedge y = x \wedge (\exists \varepsilon\; vrai \wedge (\exists \varepsilon\; vrai)).$$

Du fait que $(\exists \varepsilon\, x = fy \wedge x = fx) \notin A'$ *alors nous pouvons appliquer la règle (4) avec* $I = \emptyset$ *et donc la formule (2.35) est équivalente dans* $\mathcal{T}$ *à*

$$\neg(\exists \varepsilon\; vrai \wedge \neg(\exists x\; vrai \wedge \neg \begin{bmatrix} \exists y vrai \wedge \\ \neg(\exists z\, y = fz \wedge z = x) \wedge \\ \neg(\exists \varepsilon\, x = fy \wedge y = x) \end{bmatrix})). \tag{2.37}$$

D'après la section 2.4.3, la formule $\exists \varepsilon\, vrai \wedge (\exists y\; vrai \wedge (\exists \varepsilon\; vrai))$ *est la formule décomposée de* $\exists y\; vrai$*. Du fait que* $\exists y\; vrai \notin A'$, $(\exists z\, y = fz \wedge z = x) \in A'$ *et* $(\exists \varepsilon\, x = fy \wedge y = x) \in A'$ *alors nous pouvons appliquer la règle (4) et donc la formule (2.37) est équivalente dans* $\mathcal{T}$ *à*

$$\neg(\exists \varepsilon\; vrai \wedge \neg(\exists \varepsilon\; vrai \wedge \neg(\exists \varepsilon\; vrai)). \tag{2.38}$$

Enfin, nous pouvons appliquer la règle (1) à la formule (2.38) pour finalement obtenir la formule $\neg(\exists \varepsilon\; vrai)$*. Donc la proposition* φ_1 *est fausse dans* $\mathcal{T}$*.*

Exemple 2.4.4.2 *Soit à résoudre la proposition* φ_2 *suivante*

$$\exists x \forall y\, ((\exists z\, y = fz \wedge z = x) \vee (\exists \varepsilon\, x = fy \wedge y = x) \vee \neg(x = fy)). \tag{2.39}$$

Transformons d'abord cette proposition en une formule normalisée équivalente dans $\mathcal{T}$ *en utilisant la propriété 2.3.1.3. On obtient alors la formule suivante*

$$\neg(\exists \varepsilon\; vrai \wedge \neg(\exists x\; vrai \wedge \neg \begin{bmatrix} \exists y\, x = fy \wedge \\ \neg(\exists z\, y = fz \wedge z = x) \wedge \\ \neg(\exists \varepsilon\, x = fy \wedge y = x) \end{bmatrix})). \tag{2.40}$$

Du fait que $A = PL$ *alors cette formule est une formule de travail. Du fait que* $(\exists y\, x = fy) \in A'$, $(\exists z\, y = fz \wedge z = x) \in A'$ *et* $(\exists \varepsilon\, x = fy \wedge y = x) \in A'$*, alors nous pouvons appliquer la règle (5). La formule (2.40) est alors équivalente dans* $\mathcal{T}$ *à*

$$\neg \begin{bmatrix} \exists \varepsilon\; vrai \wedge \\ \neg(\exists x\; vrai \wedge \neg(\exists y\, x = fy)) \wedge \\ \neg(\exists x_1 y_1 z\, x_1 = fy_1 \wedge y_1 = fz \wedge z = x_1) \wedge \\ \neg(\exists x_2 y_2\, x_2 = fy_2 \wedge x_2 = fy_2 \wedge y_2 = x_2) \end{bmatrix}. \tag{2.41}$$

D'après la section 2.4.3, la formule $\exists\varepsilon\, vrai \wedge (\exists x\, vrai \wedge (\exists\varepsilon\, vrai))$ *est la formule décomposée de* $\exists x\, vrai$*. Du fait que* $(\exists x\, vrai) \notin A'$ *et* $(\exists y\, x = fy) \in A'$*, alors nous pouvons appliquer la règle (4) et donc la formule (2.41) est équivalente dans* $\mathcal{T}$ *à*

$$\neg \begin{bmatrix} \exists\varepsilon\, vrai \wedge \\ \neg(\exists\varepsilon\, vrai) \wedge \\ \neg(\exists x_1 y_1 z\, x_1 = fy_1 \wedge y_1 = fz \wedge z = x_1) \wedge \\ \neg(\exists x_2 y_2\, x_2 = fy_2 \wedge x_2 = fy_2 \wedge y_2 = x_2) \end{bmatrix}. \tag{2.42}$$

Enfin, nous pouvons appliquer la règle (1), à la formule (2.42) pour finalement obtenir la formule $vrai$*. Donc la proposition* φ_2 *est vraie dans* $\mathcal{T}$*.*

2.5 Discussion et conclusion partielle

Notre algorithme de décision qui est idéal pour décider de la valeur de vérité de très grandes propositions peut également s'appliquer sur des formules ayant des variables libres et produit alors une conjonction de formules résolues facilement transformable en une combinaison booléenne de formules de base ; mais en aucun il est capable de décider si cette conjonction de formules résolues est toujours vraie ou toujours fausse ou ni vraie ni fausse dans T. Il ne donne pas de solutions pour les contraintes qui ont au moins une variable libre et n'est pas capable de détecter si une formule ayant au moins une variable libre est toujours fausse ou toujours vraie dans T. C'est pour toutes ces raisons que notre algorithme est appelé *algorithme de décision* et non algorithme de résolution de contraintes générales.

D'autre part, nous avons montré l'infini-décomposabilité de quelques théories fondamentales telles que : la théorie équationnelle, la théorie des rationnels ou réels additifs, la théorie des arbres finis ou infinis ainsi que la combinaison des arbres finis ou infinis et des rationnels ou réels additifs [26]. Qu'en est-il de la théorie de l'ordre dense sans extrêmes ? Si l'on se place dans le modèle des rationnels ordonnés, alors pour toute instanciation des variables libres de la formule $\exists x\, z < x \wedge x < y$: soit il existe une infinité de valeurs pour x, soit il n'en existe aucune ! En effet, si les variables z et y sont instanciées respectivement par les rationnels 1 et 0, alors il n'existe pas de x tel que $1 < x \wedge x < 0$! Cette nouvelle donnée ne satisfait donc pas la définition du quantificateur infini. Par conséquent, cette théorie ne peut être infini-décomposable. Il faut alors définir un nouveau quantificateur doté de propriétés plus larges que celles du quantificateur infini. Ceci fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

Théorie zéro-infini-décomposable

Sommaire

Nous présentons dans ce chapitre la classe des théories *zéro-infni-décomposables* qui est une extension de la classe des théories infini-décomposables, caractérisée essentiellement par un principe de décomposition des conjonctions quantifiées de formules atomiques en introduisant un nouveau quantificateur appelé *zéro-infini*. Nous montrons alors la complétude de ces théories en utilisant la condition suffisante de complétude définie dans le chapitre 1, et donnons un exemple de base de théorie zéro-infini-décomposable qui n'est pas infini-décomposable. Nous donnons également une propriété liant les théories infini-décomposables aux théories zéro-infini-décomposable et montrons que les théories infini-décomposables Eq, Ra et $\mathcal{T}$ sont également zéro-infini-décomposables. Nous présentons ensuite un algorithme de décision de propositions dans toute théorie zéro-infini-décomposable T, sous forme d'un ensemble de six règles de réécriture qui transforment une formule φ, qui peut éventuellement contenir des variables libres, en une conjonction svls ϕ de formules résolues équivalente à φ dans T et telle que ϕ est : soit la formule *vrai*, soit la formule $\bigwedge_{i\in I}\neg vrai$, soit une formule ayant au moins une variable libre et facilement transformable en une combinaison booléenne de conjonctions quantifiées de formules atomiques. En particulier, si φ n'a pas de variables libres alors ϕ est, soit la formule *vrai*, soit la formule $\neg$*vrai*. La correction de notre algorithme est une autre preuve de la complétude des théories zéro-infini-décomposables. Nous terminons ce chapitre par une application à la construction d'arbres sur un ensemble ordonné $\mathcal{T}_{ord}$. Cette théorie est une axiomatisation complète d'une construction d'arbres sur un ensemble d'individus munis d'une relation d'ordre total, strict, dense et sans extrêmes. Après avoir donné l'axiomatisation de $\mathcal{T}_{ord}$, nous montrons sa zéro-infini-décomposabilité et terminons par un exemple complet de résolution de propositions dans $\mathcal{T}_{ord}$. Notons que ce chapitre a fait l'objet des publications suivantes [23], [24] et [25].

3.1 Quantificateur zéro-infini : $\exists_{o\,\infty}^{\Psi(u)}$

Soient M un modèle et T une théorie. Soit $\Psi(u)$ un ensemble de formules ayant au plus une variable libre u. Soient φ, φ_j des M-formules.

Définition 3.1.0.3 *On écrit*

$$M \models \exists_{o\,\infty}^{\Psi(u)} x\, \varphi(x), \tag{3.1}$$

si pour toute instanciation $\exists x\, \varphi'(x)$ de $\exists x\, \varphi(x)$ par des individus de M une des propriétés suivantes est vérifiée

- *l'ensemble des individus i de M tels que $M \models \varphi'(i)$, est infini*
- *pour tout sous ensemble fini $\{\psi_1(u), .., \psi_n(u)\}$ d'éléments de $\Psi(u)$, l'ensemble des individus i de M tels que $M \models \varphi'(i) \wedge \bigwedge_{j\in\{1,\dots,n\}} \neg\psi_j(i)$ est infini.*

On écrit $T \models \exists_{o\,\infty}^{\Psi(u)} x\, \varphi(x)$, si pour tout modèle M de T on a $M \models \exists_{o\,\infty}^{\Psi(u)} x\, \varphi(x)$.

Ce quantificateur est plus général que le quantificateur infini défini dans le chapitre précédent et ne restreint pas le modèle M à être infini. Dans le cas particulier où $\Psi(u) = \{faux\}$, la forme (3.1) signifie tout simplement que si $M \models \exists x\, \varphi(x)$ alors M contient une infinité d'individus i tels que $M \models \varphi(i)$. En revanche ce quantificateur, ne permet pas d'effectuer une élimination complète de quantificateurs, mais uniquement une élimination de sous-formules comme le montre la propriété suivante :

Propriété 3.1.0.4 *Soit J un ensemble fini éventuellement vide. Si $T \models \exists_{o\,\infty}^{\Psi(u)} x\, \varphi(x)$ et si pour chaque φ_j, au moins une des propriétés suivantes est vérifiée*

- *$T \models \exists ?x\, \varphi_j$,*
- *il existe $\psi_j(u) \in \Psi(u)$ tel que $T \models \forall x\, \varphi_j \to \psi_j(x)$,*

alors

$$T \models (\exists x\, \varphi(x) \wedge \textstyle\bigwedge_{j\in J} \neg\varphi_j) \leftrightarrow (\exists x\, \varphi(x)).$$

Preuve. Soit $\exists x\, \varphi'(x)$ une instanciation quelconque de $\exists x\, \varphi(x)$ par des individus de M. Montrons que si les conditions de cette propriété sont satisfaites alors

$$M \models (\exists x\, \varphi'(x) \wedge \textstyle\bigwedge_{j\in J} \neg\varphi_j(x)) \leftrightarrow (\exists x\, \varphi'(x)). \tag{3.2}$$

Soit J' l'ensemble des $j \in J$ tels $M \models \exists ?x\, \varphi_j(x)$ et soit m sa cardinalité. Du fait que pour tout $j \in J'$, $M \models \exists ?x\, \varphi'_j(x)$, alors il suffit que M contienne au moins $m+1$ individus, pour garantir l'existence d'un individu $i \in M$ tel que

$$M \models \bigwedge_{j\in J'} \neg\varphi'_j(i). \tag{3.3}$$

D'autre part, du fait que $T \models \exists_{o\,\infty}^{\Psi(u)} x\, \varphi(x)$ et du fait de la définition 3.1.0.3 du quantificateur zéro-infini, deux cas sont à étudier :

(1) Soit, $M \models \neg(\exists x\, \varphi'(x))$, donc $M \models \neg(\exists \bar{x}\, \varphi'(x) \wedge \bigwedge_{j \in J} \neg\varphi_j(x))$ et donc l'équivalence (3.2) est vraie dans M.

(2) Soit, pour tout sous-ensemble fini $\{\psi_1(u), ..., \psi_n(u)\}$ de $\Psi(u)$, l'ensemble des individus i de M tels que $M \models \varphi'(i) \wedge \bigwedge_{j=1}^{n} \neg\psi_j(i)$ est infini. Donc, du fait que pour tout $j \in J - J'$ on ait $M \models \forall x\, \varphi_j(x) \rightarrow \psi_j(x)$, alors il existe un ensemble infini ξ d'individus i of M tels $M \models \varphi'(i) \wedge \bigwedge_{j \in J-J'} \neg\varphi_j(i)$. Du fait que ξ soit infini, alors il contient au moins $m+1$ individus et donc d'après (3.3), il existe au moins un individu $i \in \xi$ tel que $M \models \varphi'(i) \wedge (\bigwedge_{j \in J-J'} \neg\varphi'_j(i)) \wedge (\bigwedge_{k \in J'} \neg\varphi'_k(i))$ et donc tel que

$$M \models \exists x\, \varphi'(x) \wedge \bigwedge_{j \in J} \neg\varphi'_j(x).$$

Du fait qu'ont ait $M \models \exists x\, \varphi'(x) \wedge \bigwedge_{j \in J} \neg\varphi_j(x)$, alors nous avons $M \models \exists x\, \varphi'(x)$ et donc l'équivalence (3.2) est vraie dans M. □

Propriété 3.1.0.5 *Si* $T \models \exists_{\infty}^{\Psi(u)} x\, \varphi(x)$ *alors* $T \models \exists_{o\,\infty}^{\Psi(u)} x\, \varphi(x)$.

Rappelons également dans cette section quelques propriétés des quantificateurs vectoriels définies dans le chapitre précédent. Nous en auront besoins tout au long de ce chapitre.

Propriété 3.1.0.6 *Si* $T \models \exists ?\bar{y}\phi$ *et si aucune variable de* $\bar{y}$ *n'a d'occurrences libres dans* φ *alors*

$$T \models (\exists \bar{x}\, \varphi \wedge \neg(\exists \bar{y}\, \phi \wedge \psi)) \leftrightarrow \begin{bmatrix} (\exists \bar{x}\, \varphi \wedge \neg(\exists \bar{y}\, \phi)) \\ \vee \\ (\exists \overline{xy}\, \varphi \wedge \phi \wedge \neg\psi) \end{bmatrix}.$$

Corollaire 3.1.0.7 *Si* $T \models\ \exists ?\bar{x}\, \varphi$ *alors*

$$T \models\ (\exists \bar{x}\, \varphi \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg\phi_i) \leftrightarrow ((\exists \bar{x}\varphi) \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{x}\, \varphi \wedge \phi_i)).$$

Corollaire 3.1.0.8 *Si* $T \models\ \psi \rightarrow (\exists ! \bar{x}\, \varphi)$ *alors*

$$T \models (\psi \wedge (\exists \bar{x}\, \varphi \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg\phi_i)) \leftrightarrow (\psi \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{x}\, \varphi \wedge \phi_i)).$$

3.2 Théorie zéro-infini-décomposable

3.2.1 Définition

Définition 3.2.1.1 *Une théorie* T *ayant au moins un modèle est dite* zéro-infini-décomposable, *s'il existe un ensemble* $\Psi(u)$ *de formules, ayant au plus une variable libre* u, *un ensemble* A *de formules fermé pour la conjonction, un ensemble* A' *de formules de la forme* $\exists \bar{x}\alpha$ *avec* $\alpha \in A$, *et un sous-ensemble* A'' *de* A *tels que*

1. *Toute formule de la forme* $\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \psi$, *avec* $\alpha \in A$ *et* ψ *une formule quelconque, est équivalente dans* T *à une formule svls de la forme*

$$\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\, \alpha'' \wedge (\exists \bar{x}'''\, \alpha''' \wedge \psi)),$$

avec $\exists \bar{x}'\, \alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$, $\alpha''' \in A$ *et* $T \models \forall \bar{x}''\alpha'' \rightarrow \exists ! \bar{x}'''\alpha'''$,

2. *Si $\exists \bar{x}'\alpha' \in A'$, alors $T \models \exists ? \bar{x}'\,\alpha'$ et pour toute variable libre y dans $\exists \bar{x}'\alpha'$, au moins une des propriétés suivantes est vérifiée*
   - $T \models \exists ? y\bar{x}'\,\alpha'$,
   - *il existe $\psi(u) \in \Psi(u)$ tel que $T \models \forall y\,(\exists \bar{x}'\,\alpha') \rightarrow \psi(y)$,*
3. *Si $\alpha'' \in A''$ alors*
   - *la formule $\neg\alpha''$ est équivalente dans T à une formule svls de la forme $\bigvee_{i\in I}\alpha_i$ avec $\alpha_i \in A$,*
   - *pour tout x'', la formule $\exists x''\alpha''$ est équivalente dans T à une formule svls qui appartient à A'',*
   - *pour tout variable x'', $T \models \exists^{\Psi(u)}_{o\;\infty} x''\,\alpha''$.*
4. *Toute conjonction de formules à plat est équivalente dans T à une disjonction svls d'éléments de A.*
5. *Si la formule $\exists \bar{x}'\alpha' \wedge \alpha''$ avec $\exists \bar{x}'\alpha' \in A'$ et $\alpha'' \in A''$ n'a pas de variables libres, alors $\bar{x} = \varepsilon$, et α' et α'' sont des éléments de $\{vrai, faux\}$.*

Notons que le mécanisme de base de décomposition des théories zéro-infini-décomposables ressemble étroitement à celui des théories décomposables en remplaçant le quantificateur infini par le quantificateur zéro-infini. Les différences principales entre ces deux familles de théories résident essentiellement dans l'ensemble A'' dont les propriétés ont été augmentées.

3.2.2 Propriétés

Propriété 3.2.2.1 *Si T est zéro-infini-décomposable alors toute formule de la forme $\exists \bar{x}\alpha$, avec $\alpha \in A$, est équivalente dans T, à une formule svls de la forme $\exists \bar{x}'\alpha' \wedge \alpha''$, avec $\exists \bar{x}'\alpha' \in A'$ et $\alpha'' \in A''$.*

Preuve. D'après le point 1 de la définition 3.2.1.1, la formule $\exists \bar{x}\alpha$ est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$\exists \bar{x}'\,\alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\,\alpha'' \wedge (\exists \bar{x}'''\,\alpha''')), \tag{3.4}$$

avec $\exists \bar{x}'\,\alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$, $\alpha''' \in A$ et $T \models \forall \bar{x}''\alpha'' \rightarrow \exists ! \bar{x}'''\alpha'''$. Du fait que $T \models \forall \bar{x}''\alpha'' \rightarrow \exists ! \bar{x}'''\alpha'''$ et du fait du corollaire 3.1.0.8 en prenant pour ϕ la formule *faux*, la formule (3.4) est équivalente dans T à

$$\exists \bar{x}'\,\alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\,\alpha''),$$

qui, du fait que $\alpha'' \in A''$ et du fait de la deuxième condition du point 3 de la définition 3.2.1.1, est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$\exists \bar{x}'\,\alpha' \wedge \alpha''_1,$$

avec $\exists \bar{x}'\,\alpha' \in A'$ et $\alpha''_1 \in A''$. □

Propriété 3.2.2.2 *Soit I un ensemble fini éventuellement vide. Si T est zéro-infini-décomposable alors toute formule de la forme*

$$\exists \bar{x}\alpha \wedge \textstyle\bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{y}_i\beta_i), \tag{3.5}$$

avec $\alpha \in A$ et $\beta_i \in A$ pour tout $i \in I$, est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$\exists \bar{x}'\alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\alpha'' \wedge \bigwedge_{j\in J} \neg(\exists \bar{y}'_j\,\beta'_j \wedge \beta''_j)),$$

avec $\exists \bar{x}'\alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$, J un ensemble fini éventuellement vide avec $Card(I) = Card(J)$ et pour tout $j \in J$ on a $\exists \bar{y}'_j\beta'_j \in A'$ et $\beta''_j \in A''$.

Preuve. D'après le point 3 de la définition 3.2.1.1 avec pour ψ la formule $\bigwedge_{i\in I}\neg(\exists\bar{y}_i\beta_i)$, la formule (3.5) est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$\exists\bar{x}'\,\alpha'\wedge(\exists\bar{x}''\,\alpha''\wedge(\exists\bar{x}'''\,\alpha'''\wedge\textstyle\bigwedge_{j\in J}\neg(\exists\bar{y}_j\beta_j))), \tag{3.6}$$

avec $\exists\bar{x}'\,\alpha'\in A'$, $\alpha''\in A''$, $\alpha'''\in A$, $\beta_j\in A$ pour tout $j\in J$, $T\models\forall\bar{x}''\alpha''\rightarrow\exists!\bar{x}'''\alpha'''$ et $Card(I)=Card(J)$. Du fait que $T\models\forall\bar{x}''\alpha''\rightarrow\exists!\bar{x}'''\alpha'''$ et du fait du corollaire 3.1.0.8, la formule (3.6) est équivalente dans T à la formule svls

$$\exists\bar{x}'\,\alpha'\wedge(\exists\bar{x}''\,\alpha''\wedge\bigwedge_{j\in J}\neg(\exists\bar{x}'''\,(\alpha'''\wedge\exists\bar{y}_j\beta_j))).$$

En remontant les quantifications $\exists\bar{y}_j$ après avoir renommé éventuellement certaines variables qui figurent dans les $\bar{y}_j$, la formule précédente est équivalente dans T à

$$\exists\bar{x}'\,\alpha'\wedge(\exists\bar{x}''\,\alpha''\wedge\bigwedge_{j\in J}\neg(\exists\bar{x}'''\bar{y}_j\,\alpha'''\wedge\beta_j)),$$

qui du fait que A soit fermé pour la conjonction est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$\exists\bar{x}'\,\alpha'\wedge(\exists\bar{x}''\,\alpha''\wedge\bigwedge_{k\in K}\neg(\exists\bar{y}_k\beta_k)),$$

avec $\exists\bar{x}'\,\alpha'\in A'$, $\alpha''\in A''$, $\beta_k\in A$ pour tout $k\in K$ et $Card(K)=Card(J)=Card(I)$. D'après la propriété 3.2.2.1 la formule précédente est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$\exists\bar{x}'\,\alpha'\wedge(\exists\bar{x}''\,\alpha''\wedge\bigwedge_{\ell\in L}\neg(\exists\bar{y}'_\ell\beta'_\ell\wedge\beta''_\ell)),$$

avec $\exists\bar{x}'\,\alpha'\in A'$, $\alpha''\in A''$, pour tout $\ell\in L$ on a $\exists\bar{y}'_\ell\beta'_\ell\in A'$ et $\beta''_\ell\in A''$ avec $Card(L)=Card(K)=Card(J)=Card(I)$. □

Corollaire 3.2.2.3 *Soit I un ensemble fini éventuellement vide. Si T est zéro-infini-décomposable alors toute formule de la forme*

$$\exists\bar{x}\,\alpha\wedge\bigwedge_{i\in I}\neg(\exists\bar{y}_i\beta_i), \tag{3.7}$$

avec $\alpha\in A$ et $\beta_i\in A$ pour tout $i\in I$, est équivalente dans T à une disjonction de formules, svls, de la forme

$$\exists\bar{x}'\,\alpha'\wedge(\exists\bar{x}''\,\alpha''\wedge\bigwedge_{j\in J}\neg(\exists\bar{y}'_j\,\beta'_j)),$$

avec $\exists\bar{x}'\alpha'\in A'$, $\alpha''\in A''$, J un ensemble fini éventuellement vide et pour tout $j\in J$ on a $\exists\bar{y}'_j\,\beta'_j\in A'$.

Preuve. Si I est vide, alors le corollaire est vrai d'après la propriété 3.2.2.2. Sinon, supposons par exemple que $I=\{1,2,...,n\}$ et $n\neq 0$. D'après la propriété 3.2.2.2, la formule3.7 est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$\exists\bar{x}'\,\alpha'\wedge(\exists\bar{x}''\alpha''\wedge\bigwedge_{i\in I}\neg(\exists\bar{y}'_i\,\beta'_i\wedge\beta''_i)), \tag{3.8}$$

avec $\exists\bar{x}'\alpha'\in A'$, $\alpha''\in A''$, $I=\{1,2,...,n\}$, et pour tout $i\in I$ on a $\exists\bar{y}'_i\,\beta'_i\in A'$ et $\beta''_i\in A''$. La formule (3.8) est donc équivalente dans T à la formule svls

$$\exists\bar{x}'\,\alpha'\wedge(\exists\bar{x}''(\alpha''\wedge\bigwedge_{i\in I,i\neq n}\neg(\exists\bar{y}'_i\,\beta'_i\wedge\beta''_i))\wedge\neg(\exists\bar{y}'_n\,\beta'_n\wedge\beta''_n)).$$

Du fait que $\exists \bar{y}'_n \beta'_n \in A'$, alors d'après le point 2 de la définition 3.2.1.1 on a $T \models \exists ? \bar{y}'_n \beta'_n$. Donc, d'après le corollaire 3.1.0.6 (en prenant pour φ la formule $\alpha'' \wedge \bigwedge_{i \in I, i \neq n} \neg(\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i \wedge \beta''_i)$), la formule précédente est équivalente dans T à la formule svls

$$T \models \begin{bmatrix} (\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''(\alpha'' \wedge \bigwedge_{i\in I, i\neq n} \neg(\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i \wedge \beta''_i)) \wedge \neg(\exists \bar{y}'_n\, \beta'_n))) \\ \vee \\ (\exists \bar{x}'\alpha' \wedge (\exists \bar{x}'' \bar{y}_n\, (\alpha'' \wedge \bigwedge_{i\in I, i\neq n} \neg(\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i \wedge \beta''_i)) \wedge \beta'_n \wedge \neg \beta''_n)) \end{bmatrix},$$

qui d'après la première condition du point 3 de la définition 3.2.1.1 est équivalente dans T à la formule svls

$$T \models \begin{bmatrix} (\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''(\alpha'' \wedge \bigwedge_{i\in I, i\neq n} \neg(\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i \wedge \beta''_i)) \wedge \neg(\exists \bar{y}'_n\, \beta'_n))) \\ \vee \\ (\exists \bar{x}'\alpha' \wedge (\exists \bar{x}'' \bar{y}_n\, (\alpha'' \wedge \bigwedge_{i\in I, i\neq n} \neg(\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i \wedge \beta''_i)) \wedge \beta'_n \wedge (\bigvee_{j \in J_n} \beta_{nj}))) \end{bmatrix},$$

avec $T \models (\neg \beta''_n) \leftrightarrow (\bigvee_{j \in J_n} \beta_{nj})$ et $\beta_{nj} \in A$ pour tout $j \in J_n$. Après avoir distribué les $\wedge$ sur les $\vee$ et les $\exists$ sur les $\vee$, la formule précédente est équivalente dans T à la formule svls

$$T \models \begin{bmatrix} (\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\, \alpha'' \wedge (\bigwedge_{i\in I, i\neq n} \neg(\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i \wedge \beta''_i)) \wedge \neg(\exists \bar{y}'_n\, \beta'_n))) \\ \vee \bigvee_{j \in J_n} \\ (\exists \bar{x}'\alpha' \wedge (\exists \bar{x}'' \bar{y}_n\, \alpha'' \wedge \beta'_n \wedge \beta_{nj} \wedge \bigwedge_{i\in I, i\neq n} \neg(\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i \wedge \beta''_i))) \end{bmatrix},$$

qui en remontant la quantification $\exists \bar{x}'' \bar{y}_n$, en renommant éventuellement certaines variables qui figurent dans $\bar{x}'' \bar{y}_n$ est équivalente dans T à

$$T \models \begin{bmatrix} (\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\, \alpha'' \wedge (\bigwedge_{i\in I, i\neq n} \neg(\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i \wedge \beta''_i)) \wedge \neg(\exists \bar{y}'_n\, \beta'_n))) \\ \vee \bigvee_{j \in J_n} \\ (\exists \bar{x}' \exists \bar{x}'' \bar{y}_n\, \alpha' \wedge \alpha'' \wedge \beta'_n \wedge \beta_{nj} \wedge \bigwedge_{i\in I, i\neq n} \neg(\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i \wedge \beta''_i)) \end{bmatrix},$$

qui en utilisant la propriété 3.2.2.2 (car A est fermé pour la conjonction et A'' est un sous-ensemble de A), est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$T \models \begin{bmatrix} (\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\, \alpha'' \wedge (\bigwedge_{i\in I, i\neq n} \neg(\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i \wedge \beta''_i)) \wedge \neg(\exists \bar{y}'_n\, \beta'_n))) \\ \vee \bigvee_{j \in J_n} \\ (\exists \bar{x}'_j\, \alpha'_j \wedge \alpha''_j \wedge \bigwedge_{i\in I, i\neq n} \neg(\exists \bar{z}'_{ij}\, \delta'_{ij} \wedge \delta''_{ij})) \end{bmatrix}, \tag{3.9}$$

avec $\exists \bar{x}'\alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$, $I = \{1, 2, ..., n\}$, $\exists \bar{y}'_n \beta'_n \in A'$, pour tout $i \in I$ avec $i \neq n$ on a $\exists \bar{y}'_i \beta'_i \in A'$ et $\beta''_i \in A''$ et pour tout $j \in J_n$ on a $\exists \bar{x}'_j \alpha'_j \in A'$, $\alpha''_j \in A''$, $\exists \bar{z}'_{ij} \delta'_{ij} \in A'$ et $\delta''_{ij} \in A''$.

Donc, en partant de la formule (3.8) qui a $car(I) = n$ sous-formules de la forme

$$\neg(\exists \bar{y}'_i \beta'_i \wedge \beta''_i), \tag{3.10}$$

avec $\exists \bar{y}'_i \beta'_i \in A'$ et $\beta''_i \in A''$, on obtient une disjonction svls de formules chacune contenant $card(I) - 1 = n - 1$ sous-formules de la forme (3.10). On a

(1) En répétant encore une fois les étapes précédentes sur la première sous-formule de (3.9) de la forme

$$\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\, \alpha'' \wedge (\bigwedge_{i\in I, i\neq n} \neg(\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i \wedge \beta''_i)) \wedge \neg(\exists \bar{y}'_n\, \beta'_n)),$$

nous obtenons une formule svls équivalente dans T de la forme

$$T \models \begin{bmatrix} (\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\, \alpha'' \wedge (\bigwedge_{i\in I, i\neq n, i\neq n-1} \neg(\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i \wedge \beta''_i)) \wedge \neg(\exists \bar{y}'_{n-1}\, \beta'_{n-1}) \wedge \neg(\exists \bar{y}'_n\, \beta'_n))) \\ \vee \bigvee_{j \in J_{n-1}} \\ (\exists \bar{x}'_j\, \alpha'_j \wedge \alpha''_j \wedge \bigwedge_{i\in I, i\neq n} \neg(\exists \bar{z}'_{ij}\, \delta'_{ij} \wedge \delta''_{ij})) \end{bmatrix}, \tag{3.11}$$

avec $\exists\bar{x}'\alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$, $I = \{1, 2, ..., n\}$, $\exists\bar{y}'_{n-1}\beta'_{n-1} \in A'$, $\exists\bar{y}'_n\beta'_n \in A'$, pour tout $i \in I$ avec $i \neq n$ et $i \neq n-1$ on a $\exists\bar{y}'_i\beta'_i \in A'$ et $\beta''_i \in A''$ et pour tout $j \in J_{n-1}$ on a $\exists\bar{x}'_j\alpha'_j \in A'$, $\alpha''_j \in A''$, $\exists\bar{z}'_{ij}\delta'_{ij} \in A'$ et $\delta''_{ij} \in A''$.

(2) En répétant les étapes précédentes sur chaque sous-formule de (3.9) ou (3.11) de la forme

$$\exists\bar{x}'_j\,\alpha'_j \wedge \alpha''_j \wedge \bigwedge_{i\in I, i\neq n} \neg(\exists\bar{z}'_{ij}\,\delta'_{ij} \wedge \delta''_{ij}),$$

nous obtenons une formule svls équivalente dans T de la forme

$$T \models \begin{bmatrix} (\exists\bar{x}'\,\alpha' \wedge (\exists\bar{x}''\,\alpha'' \wedge (\bigwedge_{i\in I, i\neq n, i\neq n-1} \neg(\exists\bar{y}'_i\,\beta'_i \wedge \beta''_i)) \wedge \neg(\exists\bar{y}'_{n-1}\,\beta'_{n-1}))) \\ \vee \bigvee_{j\in J_{n-1}} \\ (\exists\bar{x}'_j\,\alpha'_j \wedge \alpha''_j \wedge \bigwedge_{i\in I, i\neq n, i\neq n-1} \neg(\exists\bar{z}'_{ij}\,\delta'_{ij} \wedge \delta''_{ij})) \end{bmatrix},$$

avec $\exists\bar{x}'\alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$, $I = \{1, 2, ..., n\}$, $\exists\bar{y}'_{n-1}\beta'_{n-1} \in A'$, pour tout $i \in I$ avec $i \neq n$ et $i \neq n-1$ on a $\exists\bar{y}'_i\beta'_i \in A'$ et $\beta''_i \in A''$ et pour tout $j \in J_{n-1}$ on a $\exists\bar{x}'_j\alpha'_j \in A'$, $\alpha''_j \in A''$, $\exists\bar{z}'_{ij}\delta'_{ij} \in A'$ et $\delta''_{ij} \in A''$.

De (1) et (2) on déduit, qu'il suffit alors d'appliquer les étapes précédentes un nombre fini de fois sur chaque disjonction obtenue en préservant les sous-formules de la forme $\neg(\exists\bar{y}'_i\beta'_i)$, pour éliminer toutes les sous-formules de la forme $\neg(\exists\bar{y}'_i\beta'_i \wedge \beta''_i)$ au profit des formules de la forme $\neg(\exists\bar{y}'_i\beta'_i)$. A la fin, on obtient bien une disjonction de formules de la forme

$$\exists\bar{x}'\,\alpha' \wedge (\exists\bar{x}''\,\alpha'' \wedge \bigwedge_{j\in J} \neg(\exists\bar{y}'_j\,\beta'_j)),$$

avec $\exists\bar{x}'\alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$, J un ensemble fini éventuellement vide et pour tout $j \in J$ on a $\exists\bar{y}'_j\,\beta'_j \in A'$. □

3.2.3 Complétude

Théorème 3.2.3.1 *Si T est zéro-infini-décomposable alors T est complète.*

Preuve. Soit T une théorie zéro-infini-décomposable qui satisfait aux cinq conditions de la définition 2.2.1.1. Montrons que T est complète en utilisant la propriété 1.2.3.1 définie dans le chapitre 1, en prenant comme formules de base les formules de la forme $\exists\bar{x}\,\alpha$, avec $\alpha \in A$. Notons que d'après la définition 3.2.1.1, les formules de A' sont de la forme $\exists\bar{x}\alpha$ avec $\alpha \in A$ et A'' est un sous-ensemble de A.

Montrons que la première condition de la propriété 1.2.3.1 est satisfaite, c'est-à-dire, toute formule à plat est équivalente dans T à une combinaison booléenne svls de formules de base. Si φ est une formule à plat, alors, d'après le point 4 de la définition 3.2.1.1, φ est équivalente dans T à une disjonction d'éléments de A, donc à une disjonction de formules de la forme $\exists\varepsilon\,\alpha$ avec $\alpha \in A$ qui est bien une combinaison booléenne de formules de base.

Montrons que la deuxième condition de la propriété 1.2.3.1 est satisfaite, c'est-à-dire, toute formule de base sans variables libres est équivalente soit à *vrai*, soit à *faux* dans T. Soit $\exists\bar{x}\,\alpha$ avec $\alpha \in A$ une formule de base sans variables libres. D'après la propriété 3.2.2.1, cette formule est équivalente dans T à une formule svls de la forme $\exists\bar{x}'\,\alpha' \wedge \alpha''$ avec $\exists\bar{x}'\,\alpha' \in A'$ et $\alpha'' \in A''$. D'après le point 5 de la définition 3.2.1.1, on a $\bar{x} = \varepsilon$, $\alpha' \in \{vrai, faux\}$ et $\alpha'' \in \{vrai, faux\}$. Du fait que T ait au moins un modèle alors soit $T \models \varphi$ soit $T \models \neg\varphi$.

Montrons que la troisième condition de la propriété 1.2.3.1 est satisfaite, c'est-à-dire, toute formule de la forme

$$\exists x\,(\bigwedge_{i\in I}(\exists\bar{x}_i\,\alpha_i)) \wedge (\bigwedge_{j\in J} \neg(\exists\bar{y}_j\,\beta_j)), \tag{3.12}$$

avec $\alpha_i \in A$ pour tout $i \in I$ et $\beta_j \in A$ pour tout $j \in J$, est équivalente dans T à une combinaison booléenne svls de formules de base, c'est-à-dire, à une combinaison booléenne svls de formules de la forme $\exists \bar{x}\alpha$ avec $\alpha \in A$. En remontant les quantifications $\exists \bar{x}_i$ après avoir éventuellement renommé certaines variables qui figurent dans chaque $\bar{x}_i$, la formule (3.12) est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$\exists \bar{x}\, (\textstyle\bigwedge_{i\in I} \alpha_i) \wedge \bigwedge_{j\in J} \neg(\exists \bar{y}_j\, \beta_j),$$

avec $\alpha_i \in A$ pour tout $i \in I$ et $\beta_j \in A$ pour tout $j \in J$. D'après la définition 3.2.1.1, l'ensemble A est fermé pour la conjonction. Ainsi, la formule précédente est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \textstyle\bigwedge_{j\in J} \neg(\exists \bar{y}_j\, \beta_j),$$

avec $\alpha \in A$ et $\beta_j \in A$ pour tout $j \in J$. D'après le Corollaire 3.2.2.3, la formule précédente est équivalente dans T à une disjonction de formules svls de la forme

$$\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\alpha'' \wedge \textstyle\bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{y}'_i \beta'_i)). \tag{3.13}$$

avec $\exists \bar{x}'\, \alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$ et $\exists \bar{y}'_i\beta'_i \in A'$ pour tout $i \in I$. Montrons maintenant que chaque formule de cette disjonction est équivalente, dans T, à une combinaison booléenne, svls, de formules de base. Soit φ une formule de la forme (3.13). En désignant par I_1 l'ensemble des $i \in I$ tels que x''_n n'ait pas d'occurrences libres dans $\exists \bar{y}'_i\beta'_i$, la formule φ est équivalente dans T, à

$$\exists \bar{x}'\alpha' \wedge (\exists x''_1 ... \exists x''_{n-1} \begin{bmatrix} (\bigwedge_{i\in I_1} \neg(\exists \bar{y}'_i\beta'_i))\wedge \\ (\exists x''_n\, \alpha'' \wedge \bigwedge_{i\in I - I_1} \neg(\exists \bar{y}'_i\beta'_i)) \end{bmatrix}),$$

qui du fait que $\alpha'' \in A''$ et $\exists \bar{y}'_i\beta'_i \in A'$ pour tout $i \in I$ et du fait de la propriété 3.1.0.4 et des points 2 et 3 de la définition 3.2.1.1, est équivalente dans T, à

$$\exists \bar{x}'\alpha' \wedge (\exists x''_1 ... \exists x''_{n-1}\, (\textstyle\bigwedge_{i\in I_1} \neg(\exists \bar{y}'_i\beta'_i)) \wedge (\exists x''_n\alpha'')),$$

qui du fait que $\alpha'' \in A''$ et du fait de la deuxième condition du point 3 de la définition 3.2.1.1, est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$\exists \bar{x}'\alpha' \wedge (\exists x''_1 ... \exists x''_{n-1}\, (\textstyle\bigwedge_{i\in I_1} \neg(\exists \bar{y}'_i\beta'_i)) \wedge \alpha''_n),$$

avec $\exists \bar{x}'\alpha' \in A'$, $\alpha''_n \in A''$ et $\exists \bar{y}'_i\beta'_i \in A'$ pour tout $i \in I_1$. C'est-à-dire à

$$\exists \bar{x}'\alpha' \wedge (\exists x''_1 ... \exists x''_{n-1}\, \alpha''_n \wedge \textstyle\bigwedge_{i\in I_1} \neg(\exists \bar{y}'_i\beta'_i)).$$

En répétant les trois étapes précédentes $n-1$ fois et en désignant par I_k l'ensemble des $i \in I_{k-1}$ tels que $x''_{(n-k+1)}$ n'ait pas d'occurrences libres dans $\exists \bar{y}'_i\beta'_i$, on obtient une formule svls, équivalente dans T, de la forme

$$\exists \bar{x}'\alpha' \wedge \alpha''_1 \wedge \textstyle\bigwedge_{i\in I_n} \neg(\exists \bar{y}'_i\beta'_i),$$

avec $\exists \bar{x}'\, \alpha' \in A'$, $\alpha''_1 \in A''$ et $\exists \bar{y}'_i\beta'_i \in A'$ pour tout $i \in I_n$. Du fait que $\exists \bar{x}'\alpha' \in A'$, alors d'après le point 2 de la définition 3.2.1.1, on a $T \models \exists ? \bar{x}'\alpha'$ et donc $T \models \exists ? \bar{x}'\alpha' \wedge \alpha'_1$. D'après le corollaire 3.1.0.7, la formule précédente est alors équivalente, dans T, à

$$(\exists \bar{x}'\alpha' \wedge \alpha''_1) \wedge \textstyle\bigwedge_{i\in I_n} \neg(\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge \alpha''_1 \wedge \exists \bar{y}'_i\beta'_i),$$

qui, en remontant les quantifications $\exists\bar{y}'_i$ en renommant éventuellement certaines variables qui figurent dans les $\bar{y}'_i$, est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$(\exists\bar{x}'\alpha' \wedge \alpha''_1) \wedge \bigwedge_{i\in I_n} \neg(\exists\bar{x}'\bar{y}'_i\,\alpha' \wedge \alpha''_1 \wedge \beta'_i),$$

avec α', α''_1, β'_i des éléments de A, A'' est un sous-ensemble de A et $\exists\bar{x}\alpha' \in A'$. Du fait que les formules α', α''_1, β'_i soient des éléments de A et que A soit fermé pour la conjonction, alors la formule précédente est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$(\exists\bar{x}\alpha) \wedge \bigwedge_{i\in I_n} \neg(\exists\bar{y}_i\,\beta_i),$$

avec $\alpha \in A$ et $\beta_i \in A$ pour tout $i \in I$. Cette formule est une combinaison booléenne de formules de la forme $\exists\bar{x}\alpha$ avec $\alpha \in A$, c'est-à-dire, une combinaison booléenne de formules de base. Notons que nous n'avons jamais ajouté de variables libres et avons renommé uniquement les variables quantifiées. Donc, la troisième condition de la propriété 1.2.3.1 est satisfaite.

Du fait que T satisfasse aux trois conditions de la propriété 1.2.3.1, alors T est une théorie complète. □

D'après le théorème 3.2.3.1 et le corollaire 1.2.3.2, on a le corollaire suivant

Corollaire 3.2.3.2 *Si T est zéro-infini-décomposable et si pour toute formule de la forme $\exists\bar{x}'\alpha' \wedge \alpha''$ élément de A' on a $\bar{x}' = \varepsilon$ et $\alpha' \wedge \alpha'' \in AT$, alors T accepte un élimination complète de quantificateurs.*

Preuve. Soit T une théorie zéro-infini-décomposable telle que pour toute formule de la forme $\exists\bar{x}'\alpha' \wedge \alpha''$ élément de A' on ait $\bar{x}' = \varepsilon$ et $\alpha' \wedge \alpha'' \in AT$. Soit φ une formule quelconque. Dans la preuve du Théorème 3.2.3.1, nous avons montré que T satisfait aux trois conditions de la propriété 1.2.3.1 en prenant comme formules de base, des formules de la forme $\exists\bar{x}\alpha$ avec $\alpha \in A$. Donc, d'après le corollaire 1.2.3.2, la formule φ est équivalente dans T à une combinaison booléenne svls de formules de base, c'est-à-dire, à une combinaison booléenne svls de formules de la forme $\exists\bar{x}\alpha$ avec $\alpha \in A$. D'après la propriété 3.2.2.1, chacune de ces formules de base est équivalente dans T à une formule svls de la forme $\exists\bar{x}'\alpha' \wedge \alpha''$ avec $\exists\bar{x}'\,\alpha' \in A'$ et $\alpha'' \in A''$. Du fait que $\bar{x}' = \varepsilon$ et du fait que $\alpha' \wedge \alpha'' \in AT$ alors la formule φ est équivalente dans T à une combinaison booléenne svls ϕ de conjonctions de formules atomiques. D'après la syntaxe de nos formules atomiques définie dans le chapitre 1, il est clair que ϕ ne contient plus de quantificateurs. □

Terminons par une propriété qui montre le lien entre théorie infini-décomposable et théorie zéro-infini-décomposable. Du fait des propriétés 3.1.0.5 et 2.1.2.3, on a la propriété suivante

Propriété 3.2.3.3 *Une théorie T infini-décomposable est zéro-infini décomposable si pour toute formule de la forme $\exists\bar{x}''\,\alpha'' \in A''$, la formule $\neg\alpha''$ est équivalente dans T à une disjonction d'éléments de A.*

Bien entendu les ensembles A et A'' cités dans cette propriété sont ceux de la définition de théorie infini-décomposable et non zéro-infini-décomposable. Les théories Eq, Ra et $\mathcal{T}$ définies dans le chapitre 2, sont zéro-infini-décomposables. En effet nous avons prouvé leur infini-décomposabilité en utilisant pour chacune un ensemble A'' contenant des formules de la forme $\exists\bar{x}''\,vrai$. Par conséquent, du fait que la formule $\neg vrai$ soit équivalente à faux dans toutes ces théories et que la formule *faux* soit un élément de A dans chacune de ces théories, alors ces théories sont zéro-infini-décomposables.

3.2.4 Exemple de base

Nous allons maintenant présenter une théorie de base qui nous a inspiré la définition des théories zéro-infini-décompoables. Cette théorie n'est pas infin-décomposable mais uniquement zéro-infini-décomposable. C'est la théorie de l'ordre dense sans extrêmes.

Soient alors F un ensemble de symboles de fonction vide et R un ensemble de symboles de relation contenant uniquement le symbole de relation $<$ d'arité 2. Si t_1 et t_2 sont des termes, alors on écrit $t_1 < t_2$ pour $<(t_1, t_2)$. Soit T_{ord} la théorie de l'ordre strict, total, dense et sans extrêmes, de signature $S = F \cup R$ et dont les axiomes sont l'ensemble des propositions suivantes

1 $\forall x \, \neg x < x$,
2 $\forall x \forall y \forall z \, (x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z$,
3 $\forall x \forall y \, x < y \vee x = y \vee y < x$,
4 $\forall x \forall y \, x < y \rightarrow (\exists z \, x < z \wedge z < y)$,
5 $\forall x \, \exists y \, x < y$,
6 $\forall x \, \exists y \, y < x$.

La relation $<$ est une relation d'ordre *strict* (axiomes 1et 2), *total* (axiome 3), *dense* (axiome 4) et *sans extrême* (axiomes 5 et 6). Cette théorie a pour modèle standard un ensemble infini d'éléments munis d'une relation d'ordre strict, total, dense et sans extrêmes. Du fait que $F = \emptyset$ alors toutes les équations et relations sont à plat. Introduisons maintenant trois propriétés usuelles de cette théorie qui nous seront utiles pour montrer sa zéro-infini-décomposabilité. La première introduit l'élimination de quantificateur de Fourier. La seconde montre l'inversion des relations par introduction d'égalités et en utilisant le fait que l'ordre soit total, et la troisième est une conséquence du fait que la relation soit dense et sans extrêmes et introduit la notion de zéro-infini solutions dans tout modèle de T_{ord}.

Propriété 3.2.4.1 *Soient I et J deux ensembles finis éventuellement vides. On a*

$$T_{ord} \models (\exists x \, (\bigwedge_{i \in I} x < y_i) \wedge (\bigwedge_{j \in J} z_j < x)) \leftrightarrow \bigwedge_{i \in I} \bigwedge_{j \in J} (z_j < y_i).$$

Propriété 3.2.4.2

$$T_{ord} \models \forall xy \, \neg(x < y) \leftrightarrow ((x = y) \vee (y < x)).$$

Propriété 3.2.4.3 *Soit M un modèle de T_{ord}, soient J et K des ensembles finis, éventuellement vides, d'individus de M et soit $\varphi(x)$ la M-formule :*

$$(\bigwedge_{j \in J} j < x) \wedge (\bigwedge_{k \in K} x < k).$$

L'ensemble des individus i de M tels que $M \models \varphi(i)$ est infini ou vide.

Supposons maintenant que les variables de V soient ordonnées par un ordre total, strict, dense et sans extrêmes, noté $\succ$.

Définition 3.2.4.4 *Une conjonction de formules à plat α est dite $(\succ)$-résolue dans T_{ord} si*

- *toutes les équations de α sont de la forme $x = y$ avec $x \succ y$,*
- *tous les membres gauches des équations de α sont distincts et ont une et une seule occurrence dans α,*

– *α ne contient pas de sous-formules de la forme faux ou*

$$x_0 < x_1 \wedge x_1 < x_2 \wedge ... \wedge x_{n-1} < x_n \wedge x_n < x_0.$$

Exemple 3.2.4.5 *Soit x, y z et w des variables telles que $x \succ y \succ z \succ w$. la formule $x = y \wedge z < x$ n'est pas $(\succ)$-résolue car x est membre gauche de l'équation $x = y$ et apparaît dans la relation $z < x$. La formule $x = y \wedge y < z \wedge z < w \wedge w < y$ n'est pas $(\succ)$-résolue car elle ne satisfait pas le dernier point de la définition 3.2.4.4. La formule $x = z \wedge y = z \wedge z < w$ est $(\succ)$-résolue.*

Propriété 3.2.4.6 *Toute conjonction de formules à plat est équivalente dans T_{ord} soit à faux , soit à une conjonction $(\succ)$-résolue svls de formules à plat.*

Preuve. Introduisons l'ensemble des règles suivantes

$$
\begin{array}{lll}
(1) & x = x & \Longrightarrow \ \mathit{vrai}, \\
(2) & y = x & \Longrightarrow \ x = y, \\
(3) & x = y \wedge x = z & \Longrightarrow \ x = y \wedge z = y, \\
(4) & x = y \wedge z = x & \Longrightarrow \ x = y \wedge z = y, \\
(5) & x = y \wedge x < z & \Longrightarrow \ x = y \wedge y < z, \\
(6) & x = y \wedge z < x & \Longrightarrow \ x = y \wedge z < y, \\
(7) & \mathit{faux} \wedge \alpha & \Longrightarrow \ \mathit{faux}, \\
(8) & x_0 < x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} < x_n \wedge x_n < x_0 & \Longrightarrow \ \mathit{faux},
\end{array}
$$

Les règles (2)...(6) sont appliquées uniquement si $x \succ y$, cette condition empêche les règles de s'appliquer indéfiniment. Dans la règle (8), n peut être nul[14]. Il est clair que toute application répétée de ces règles sur une conjonction de formules à plat termine, et produit soit à faux, soit à une conjonction svls $(\succ)$-résolue d'équations à plat équivalente dans T_{ord}.□

Propriété 3.2.4.7 *Soient α une conjonction $(\succ)$-résolue d'équations et $\bar{x}$ le vecteur des membres gauches des équations de α. Soit β une conjonction $(\succ)$-résolue de relations. On a*

1. *$T_{ord} \models \exists! \bar{x}\, \alpha$.*
2. *$T_{ord} \models \exists_{o\,\infty}^{\{faux\}} x\, \beta$.*
3. *Pour tout $x \in var(\alpha)$ on a $T_{ord} \models \exists ? x\, \alpha$.*

Le premier point provient du fait que tous les membres gauches sont distincts et ont une et une seule occurrence dans α. Donc, dans tout modèle de T_{ord}, pour toute instanciation des membres droits des équations de α, il existe une et une seule valeur pour les membres gauches des équations de α. Le deuxième point est une conséquence de la propriété 3.2.4.3 et du fait que le domaine de tout modèle de T_{ord} soit infini[15]. Notons que dans cette propriété x n'a pas forcément d'occurrences dans β. Le troisième point provient du fait que dans une conjonction $(\succ)$-résolue d'équations il n'existe pas de formules de la forme $x = x$ (car $x \not\succ x$). Donc, en utilisant les propriétés de l'égalité, pour tout modèle de T_{ord} et pour toute instanciation des variables de $var(\alpha) - \{x\}$, soit il existe une unique solution pour x, soit il existe une contradiction dans cette instanciation et donc il n'y a pas de valeurs possibles pour x.

[14] La règle sera donc de la forme $x_0 < x_0 \leftrightarrow \mathit{faux}$.

[15] Du fait que tout modèle ait au moins un individu alors en utilisant les axiomes 1,5 et 6 on crée une infinité d'individus tous distinct dans tout modèle de T_{ord}.

Propriété 3.2.4.8 *La théorie T_{ord} est zéro-infini-décomposable.*

Preuve. Montrons que T_{ord} satisfait aux conditions de la définition 3.2.1.1. Les ensembles A, A', A'' et $\Psi(u)$ sont choisis de la manière suivante

- A est l'ensemble PL.
- A' est l'ensemble des formules de la forme $\exists\varepsilon\, \alpha'$ où α' est soit la formule *faux*, soit une conjonction $(\succ)$-résolue d'équations à plat,
- A'' est l'ensemble des conjonctions $(\succ)$-résolues de relations,
- $\Psi(u) = \{faux\}$.

Bien entendu, PL est fermé pour la conjonction, A' contient des formules de la forme $\exists\bar{x}'\, \alpha'$ avec $\alpha' \in PL$ et A'' est une sous ensemble de PL.

Montrons que T_{ord} satisfait à la première condition de la définition 3.2.1.1. Soit $\alpha \in PL$ et ψ une formule quelconque. Soit $\bar{x}$ un vecteur de variables. Choisissons un ordre $\succ$ tel que les variables de $\bar{x}$ soient supérieures aux variables libres $\exists\bar{x}\, \alpha$. D'après la propriété 3.2.4.6 deux cas sont à étudier

Soit, la formule α est équivalente à *faux* dans T_{ord} et donc la formule $\exists\bar{x}\alpha \wedge \psi$ est équivalente dans T_{ord} à une formule décomposée de la forme

$$\exists\varepsilon\, faux \wedge (\exists\varepsilon\, vrai \wedge (\exists\varepsilon\, vrai \wedge \psi)).$$

Soit, la formule α est équivalente dans T_{ord} à une conjonction β $(\succ)$-résolue d'équations et de relations à plat. Soit alors X_g l'ensemble des variables de $\bar{x}$ qui apparaissent dans un membre gauche d'une des équations de β. Soit X_n l'ensemble des variables de $\bar{x}$ qui n'apparaissent pas dans les membres gauches des équations de β. La formule $\exists\bar{x}\alpha \wedge \psi$ est équivalente dans T_{ord} à une formule décomposée de la forme

$$\exists\bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists\bar{x}''\, \alpha'' \wedge (\exists\bar{x}'''\, \alpha''' \wedge \psi)), \tag{3.14}$$

avec $\bar{x}' = \varepsilon$. La formule α' contient la conjonction des équations de β dont les membres gauches n'appartiennent pas à X_g, c'est-à-dire dont les membres gauches sont libres dans $\exists\bar{x}\beta$. Le vecteur $\bar{x}''$ contient les variables de X_n. La formule α'' contient la conjonction des relations de β. Le vecteur $\bar{x}'''$ contient les variables de X_g. La formule α''' est la conjonction des équations de β dont les membres gauches appartiennent à X_g. D'après notre construction, il est clair que $\exists\bar{x}'\alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$ et $\alpha''' \in A$. De plus, en utilisant le premier point de la propriété 3.2.4.7 on a directement $T_{ord} \models \forall\bar{x}''\alpha'' \rightarrow \exists!\bar{x}'''\alpha'''$. Montrons maintenant que (3.14) et $\exists\bar{x}\alpha \wedge \psi$ sont équivalentes dans T_{ord}. Soient X, X', X'' et X''' les ensembles des variables des vecteurs[16] de $\bar{x}$, $\bar{x}'$, $\bar{x}''$ et $\bar{x}'''$. Si α est équivalente à *faux* dans T_{ord} alors l'équivalence de la décomposition est évidente. Sinon, β est une conjonction $(\succ)$-résolue d'équations et de relations. Donc d'après notre construction nous avons : $X = X' \cup X'' \cup X'''$, $X' \cap X'' = \emptyset$, $X' \cap X''' = \emptyset$, $X'' \cap X''' = \emptyset$, $X' = \emptyset$, pour tout $x''_i \in X''$ $x''_i \notin var(\alpha')$ et pour tout $x'''_i \in X'''$ on a $x'''_i \notin var(\alpha' \wedge \alpha'')$. Ces propriétés proviennent de la définition d'une conjonction $(\succ)$-résolue de formules à plat et de l'ordre $\succ$ qui a été choisi tel que les variables quantifiées de $\exists\bar{x}\, \alpha$ soient plus grandes que les variables libres de $\exists\bar{x}\, \alpha$. D'autre part, chaque équation et chaque relation de β apparaît dans $\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha'''$ et chaque équation et chaque relation de $\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha'''$ apparaît dans β et donc $T_{ord} \models \beta \leftrightarrow (\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha''')$. Nous avons montré que les quantifications sont cohérentes et que l'équivalence $T_{ord} \models \beta \leftrightarrow \alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha'''$ est satisfaite. D'après la propriété 3.2.4.6 on a $T_{ord} \models \alpha \leftrightarrow \beta$ et donc la décomposition maintient l'équivalence dans T_{ord}.

[16]Bien entendu, si $\bar{x} = \varepsilon$ alors $X = \emptyset$

Exemple 3.2.4.9 *Décomposons la formule*

$$\exists xyz\, v = w \wedge z = z \wedge z = x \wedge v = y \wedge v < z.$$

Choisissons d'abord un ordre $\succ$ tel que $x \succ y \succ z \succ v \succ w$ et transformons maintenant la formule $v = w \wedge z = z \wedge z = x \wedge v = y \wedge v < z$ en une conjonction ($\succ$)-résolue de formules à plat. La formule précédente est équivalente dans T_{ord} à

$$\exists xyz\, v = w \wedge x = z \wedge y = w \wedge w < z.$$

Cette formule est équivalente dans T_{ord} à une formule décomposée de la forme

$$\exists \varepsilon\, v = w \wedge (\exists z\, w < z \wedge (\exists xy\, x = z \wedge y = w)).$$

La théorie T_{ord} satisfait à la deuxième condition de la définition 3.2.1.1 d'après le troisième point de la propriété 3.2.4.7 et en utilisant le fait que $\bar{x}' = \varepsilon$. La théorie T_{ord} satisfait au premier point de la troisième condition de la définition 3.2.1.1 d'après la propriété 3.2.4.2 qui nous permet de montrer que toute formule de la forme $\neg\varphi$ avec φ une conjonction ($\succ$)-résolue de relations est équivalente dans T_{ord} à une disjonction de relations et d'équations, donc à une disjonction d'éléments de PL. La théorie T_{ord} satisfait au deuxième point de la troisième condition de la définition 3.2.1.1 d'après la propriété 3.2.4.1. La théorie T_{ord} satisfait au troisième point de la troisième condition de la définition 3.2.1.1 d'après le second point de la propriété 3.2.4.7. La théorie T_{ord} satisfait à la quatrième condition de la définition 3.2.1.1 du fait que $A = PL$. La théorie T_{ord} satisfait à la dernière condition de la définition 3.2.1.1 car A' est de la forme $\exists \varepsilon\, \alpha'$ où α' est soit la formule *faux* soit une conjonction ($\succ$)-résolue d'équations à plat et A'' contient une conjonction ($\succ$)-résolue de relations. Donc, si $\exists \varepsilon\, \alpha' \wedge \alpha''$ n'a pas de variables libres alors $\alpha' \in \{vrai, faux\}$ et $\alpha'' \in \{vrai\}$.

On a montré que T_{ord} satisfait à toutes les conditions de la définition 3.2.1.1, elle est donc zéro-infini-décomposable. □

Notons également que T_{ord} accepte une élimination complète de quantificateurs. En effet, le corollaire 3.2.3.2 illustre ce résultat car pour toute formule $\exists \bar{x}'\alpha' \wedge \alpha''$ avec $\exists \bar{x}'\alpha' \in A'$ et $\alpha'' \in A''$ on a $\bar{x}' = \varepsilon$ et $\alpha' \wedge \alpha'' \in PL$.

3.3 Résolution de propositions dans les théories zéro-infini-décomposables

Fixons-nous pour toute cette section une théorie T zéro-infini-décomposable munie d'un ensemble F de symboles de fonction et d'un ensemble R de symboles de relation. Les ensembles $\Psi(u)$, A, A' et A'' sont maintenant connus et fixés.

3.3.1 Formule normalisée

Définition 3.3.1.1 *Une formule normalisée φ de profondeur $d \geq 1$ est une formule de la forme*

$$\neg(\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \bigwedge_{i \in I} \varphi_i), \tag{3.15}$$

avec I un ensemble fini (éventuellement vide), $\alpha \in PL$, tous les φ_i sont des formules normalisées de profondeur d_i avec $d = 1 + \max\{0, d_1, ..., d_n\}$ et toutes les variables quantifiées de φ ont des noms distincts et différents des noms des variables libres.

Notons que Les formules normalisées des théories décomposables sont les mêmes que celles des théories zéro-infini-décomposables. Rappelons également la propriété suivante[17]

Propriété 3.3.1.2 *Toute formule φ est équivalente dans la théorie vide[18] à une formule normalisée svls de profondeur $d \geq 1$.*

3.3.2 Formule de travail

Définition 3.3.2.1 *Une formule de travail φ de profondeur $d \geq 1$ est une formule de la forme*

$$\neg(\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \bigwedge_{i \in I} \varphi_i), \tag{3.16}$$

avec I un ensemble fini éventuellement vide, $\alpha \in A$, tous les φ_i sont des formules de travail de profondeur d_i avec $d = 1 + \max\{0, d_1, ..., d_n\}$ et toutes les variables quantifiées de φ ont des noms distincts et différents des noms des variables libres.

Propriété 3.3.2.2 *Toute formule est équivalente dans T à une conjonction svls de formules de travail.*

Preuve. Soit φ une formule quelconque. D'après la propriété 3.3.1.2, φ est équivalente dans T à une formule svls normalisée ϕ. Montrons maintenant par récurrence sur la profondeur de ϕ que ϕ est équivalente dans T à une formule de travail. Si ϕ est de profondeur 1, alors elle est de la forme

$$\neg(\exists \bar{x} \alpha), \tag{3.17}$$

avec $\alpha \in PL$. D'après le point 4 de la définition 3.2.1.1, toute conjonction de formules à plat est équivalente dans T à une disjonction d'éléments de A. Donc, il existe une disjonction svls $\bigvee_{j \in J} \alpha_j$ avec $\alpha_j \in A$ pour tout $j \in J$ et telle que $T \models \alpha \leftrightarrow \bigvee_{j \in J} \alpha_j$. Ainsi, la formule (3.17) est équivalente dans T à

$$\neg(\exists \bar{x}\, (\bigvee_{j \in J} \alpha_j)),$$

qui est équivalente dans T à

$$\neg \bigvee_{j \in J} (\exists \bar{x}\, \alpha_j),$$

c'est-à-dire à

$$\bigwedge_{j \in J} \neg(\exists \bar{x}\, \alpha_j),$$

qui, en renommant les variables quantifiées par des noms distincts et différents de ceux des variables libres, donne bien une conjonction de formules de travail. Supposons maintenant que toute formule normalisée de profondeur n soit équivalente dans T à une conjonction de formules de travail, et montrons que toute formule normalisée de profondeur $n+1$ est équivalente dans T à une conjonction de formules de travail. Soit alors une formule normalisée de profondeur $n+1$. Elle est donc de la forme

$$\neg(\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \bigwedge_{i \in I} \varphi_i), \tag{3.18}$$

où tous les φ_i sont des formules normalisées de profondeur inférieure ou égale à n. D'après l'hypothèse de récurrence, chacune des formules normalisées φ_i est équivalente dans T à une

[17] La preuve de cette propriété est la même que celle de la propriété 2.3.1.3 du chapitre 2.

[18] Donc dans toute théorie.

conjonction de formules de travail. Donc, la formule (3.18) est équivalente dans T à une formule de la forme

$$\neg(\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \bigwedge_{i\in I} \varphi_i), \tag{3.19}$$

où tous les φ_i sont des formules de travail et $\alpha \in A$. D'après le point 4 de la définition 3.2.1.1, toute conjonction de formules à plat est équivalente dans T à une disjonction d'éléments de A. Donc, il existe une disjonction svls $\bigvee_{j\in J} \alpha_j$ avec $\alpha_j \in A$ pour tout $j \in J$ et telle que $T \models \alpha \leftrightarrow \bigvee_{j\in J} \alpha_j$. Ainsi, la formule (3.19) est équivalente dans T à

$$\neg(\exists \bar{x}\, (\bigvee_{j\in J} \alpha_j) \wedge \bigwedge_{i\in I} \varphi_i), \tag{3.20}$$

qui est équivalente dans T à

$$\neg(\exists \bar{x}\, \bigvee_{j\in J} (\alpha_j \wedge \bigwedge_{i\in I} \varphi_i)),$$

c'est-à-dire à

$$\neg \bigvee_{j\in J} (\exists \bar{x}\, \alpha_j \wedge \bigwedge_{i\in I} \varphi_i),$$

et donc à

$$\bigwedge_{j\in J} \neg(\exists \bar{x}\, \alpha_j \wedge \bigwedge_{i\in I} \varphi_i),$$

qui, en renommant les variables quantifiées par des noms distincts et différents de ceux des variables libres, donne bien une conjonction de formules de travail. □

Définition 3.3.2.3 *Une formule* résolue *est une formule de la forme*

$$\neg(\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge \alpha'' \wedge \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i)),$$

avec I un ensemble fini éventuellement vide, $\exists \bar{x}'\alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$, $\exists \bar{y}'_i \beta'_i \in A'$ pour tout $i \in I$, α' et α'' sont différents de la formule faux et tous les β'_i sont différents des formules vrai et faux.

Propriété 3.3.2.4 *Soit φ une conjonction de formules résolues sans variables libres. La conjonction φ est soit la formule vrai soit la formule $\bigwedge \neg$vrai.*

Preuve. Soit φ une conjonction de formules résolues sans variables libres. D'après la définition 3.3.2.3, φ est de la forme

$$vrai \wedge \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{x}'_i \alpha'_i \wedge \alpha''_i \wedge \bigwedge_{j\in J_i} \neg(\exists \bar{y}'_{ij} \beta'_{ij})) \tag{3.21}$$

avec

1. I un ensemble fini éventuellement vide,
2. $(\exists \bar{x}'_i \alpha'_i) \in A'$ et $\alpha''_i \in A''$ pour tout $i \in I$,
3. $(\exists \bar{y}'_{ij} \beta'_{ij}) \in A'$ pour tout $i \in I$ et tout $j \in J_i$,
4. α'_i et α''_i sont différents de *faux* pour tout $i \in I$,
5. β'_{ij} différent de *vrai* et de *faux* pour tout $i \in I$ et tout $j \in J_i$.

Du fait que ces formules résolues n'aient pas de variables libres et du fait que T soit zéro-infini-décomposable alors d'après le cinquième point de la définition 3.2.1.1 et des conditions 2 et 3 de (3.21) on a

– (*) pour toute formule $\exists \bar{x}'_i \alpha'_i \wedge \alpha''_i$ on a $\bar{x}' = \varepsilon$, $\alpha'_i \in \{vrai, faux\}$ et $\alpha''_i \in \{vrai, faux\}$,
– (**) pour toute formule $\exists \bar{y}'_{ij} \beta'_{ij}$ on a $\bar{y}'_{ij} = \varepsilon$ et $\beta'_{ij} \in \{vrai, faux\}$.

D'après la condition 4 de (3.21) tous les α'_i et α''_i sont différents de *faux*, donc en utilisant (*) on obtient

– (***) Les formules $\exists \bar{x}'_i \alpha'_i \wedge \alpha''_i$ sont de la forme $\exists \varepsilon\, vrai \wedge vrai$.

D'autre part, en utilisant (**) et la condition 5 de (3.21), on déduit que les ensembles J_i de (3.21) sont vides. Ainsi, en utilisant (***) on déduit que φ est de la forme

$$vrai \wedge (\bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \varepsilon\, vrai \wedge vrai))$$

si $I = \emptyset$ alors φ est la formule *vrai*, sinon, du fait que nous ne distinguons pas deux formules qui peuvent être rendues égales en utilisant la transformation

$$\varphi \wedge \psi \Longrightarrow \psi \wedge \varphi, \ \ (\varphi \wedge \psi) \wedge \phi \Longrightarrow \varphi \wedge (\psi \wedge \phi),$$
$$\varphi \wedge vrai \Longrightarrow \varphi, \ \ \varphi \vee faux \Longrightarrow \varphi,$$

alors φ est la formule

$$\bigwedge \neg vrai.$$

□

Propriété 3.3.2.5 *Toute formule résolue est équivalente dans T à une combinaison booléenne svls de formules de la forme $\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge \alpha''$ avec $\exists \bar{x}'\, \alpha' \in A'$ et $\alpha'' \in A''$.*

Preuve. Soit φ une formule résolue. D'après la définition 3.3.2.3, la formule φ est de la forme

$$\neg(\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge \alpha'' \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i)),$$

avec $\exists \bar{x}' \alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$ et $\exists \bar{y}'_i \beta'_i \in A'$ pour tout $i \in I$. Du fait que $\exists \bar{x}' \alpha' \in A'$ alors d'après la définition 3.2.1.1, $T \models \exists ? \bar{x}' \alpha'$ et donc $T \models \exists ? \bar{x}' \alpha' \wedge \alpha''$. Ainsi, en utilisant le corollaire 3.1.0.7, φ est équivalente dans T à la formule svls suivante

$$\neg((\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge \alpha'') \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge \alpha'' \wedge (\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i))).$$

D'après la définition de formules de travail, toutes les variables quantifiées de φ ont des noms différents de ceux des variables libres, donc la formule précédente est équivalente dans T à la formule svls suivante

$$\neg((\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge \alpha'') \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{x}' \bar{y}'_i\, \alpha' \wedge \alpha'' \wedge \beta'_i)).$$

Du fait que $\exists \bar{x}' \alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$ et $\exists \bar{y}'_i \beta'_i \in A'$ pour tout $i \in I$, alors $\alpha' \in A$, $\alpha'' \in A$ et $\beta'_i \in A$. Du fait que A soit fermé pour la conjonction alors $\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \beta'_i \in A$ pour tout $i \in I$. D'après la propriété 3.2.2.1, la formule précédente est équivalente dans T à une formule svls de la forme

$$\neg((\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge \alpha'') \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i \wedge \beta''_i)),$$

avec $\exists \bar{x}'\alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$ et pour tout $i \in I$ on a $\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i \in A'$ et $\beta''_i \in A''$. La formule précédente est finalement équivalente dans T à

$$(\neg(\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge \alpha'')) \vee \bigvee_{i\in I} (\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i \wedge \beta''_i).$$

qui est bien une combinaison booléenne svls d'éléments de la forme $\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge \alpha''$ avec $\exists \bar{x}'\, \alpha' \in A'$ et $\alpha'' \in A''$. □

3.3.3 Règles de réécriture

Nous présentons maintenant les règles de réécriture qui transforment une conjonction de formules de travail quelconques en une conjonction svls de formules résolues, équivalente dans T. Appliquer la règle $p_1 \Longrightarrow p_2$ à la formule de travail p, signifie remplacer dans p une sous-formule p_1 par la formule p_2, en considérant le connecteur $\wedge$ associatif et commutatif.

$$(1) \quad \neg \begin{bmatrix} \exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \\ \neg(\exists \bar{y}\; vrai) \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad vrai$$

$$(2) \quad \neg \begin{bmatrix} \exists \bar{x}\, \alpha \wedge faux \wedge \varphi \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad vrai$$

$$(3) \quad \neg \begin{bmatrix} \exists \bar{x}\, \alpha \wedge \\ \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{y}_i\, \beta_i) \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \neg \begin{bmatrix} \exists \bar{x}'\bar{x}''\, \alpha' \wedge \alpha'' \wedge \\ \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{x}'''\bar{y}_i\, \alpha''' \wedge \beta_i)^* \end{bmatrix}$$

$$(4) \quad \neg \begin{bmatrix} \exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \\ \neg(\exists \bar{y}'\, \beta' \wedge \beta'') \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \neg(\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \neg(\exists \bar{y}'\, \beta')) \wedge \\ \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{x}\bar{y}'\, \alpha \wedge \beta' \wedge \beta''_i \wedge \varphi)^* \end{bmatrix}$$

$$(5) \quad \neg \begin{bmatrix} \exists \bar{x}\, \alpha \wedge \\ \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i) \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \neg \begin{bmatrix} \exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge \alpha''_* \\ \bigwedge_{i\in I'} \neg(\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i) \end{bmatrix}$$

$$(6) \quad \neg \begin{bmatrix} \exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \\ \neg \begin{bmatrix} \exists \bar{y}'\, \beta' \wedge \beta'' \wedge \\ \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{z}'_i\, \delta'_i) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \neg(\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \neg(\exists \bar{y}'\, \beta' \wedge \beta'')) \wedge \\ \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{x}\bar{y}'\bar{z}_i\, \alpha \wedge \beta' \wedge \beta'' \wedge \delta'_i \wedge \varphi)^* \end{bmatrix}$$

avec α un élément de A, φ une conjonction de formules de travail et I un ensemble fini éventuellement vide. Dans la règle (3), la formule $\exists \bar{x}\, \alpha$ est équivalente dans T à une formule décomposée de la forme $\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\, \alpha'' \wedge (\exists \bar{x}'''\, \alpha'''))$ avec $\exists \bar{x}'\, \alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$, $\alpha''' \in A$, $T \models \forall \bar{x}''\alpha'' \rightarrow \exists! \bar{x}'''\alpha'''$ et $\exists \bar{x}'''\, \alpha'''$ différent de $\exists \varepsilon\; vrai$. Tous les β_i sont des éléments de A. La formule $(\exists \bar{x}'''\bar{y}_i\, \alpha''' \wedge \beta_i)^*$ est la formule $(\exists \bar{x}'''\bar{y}_i\, \alpha''' \wedge \beta_i)$ dans laquelle nous avons renommé les variables qui figurent dans $\bar{x}'''$ par des noms distincts et différents de ceux des variables libres. Dans la règle (4), la formule $\exists \bar{x}\, \alpha$ est équivalente dans T à une formule décomposée de la forme $\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\, \alpha'' \wedge (\exists \varepsilon\; vrai))$ avec $\exists \bar{x}'\, \alpha' \in A'$ et $\alpha'' \in A''$. La formule $\exists \bar{y}'\, \beta'$ est un élément de A'. La formule β'' est élément de A'' et est différente de la formule *vrai*. De plus, $T \models (\neg \beta'') \leftrightarrow \bigvee_{i\in I} \beta''_i$ avec $\beta''_i \in A$. la formule $(\exists \bar{x}\bar{y}'\, \alpha \wedge \beta' \wedge \beta''_i \wedge \varphi)^*$ est la formule $(\exists \bar{x}\bar{y}'\, \alpha \wedge \beta' \wedge \beta''_i \wedge \varphi)$ dans laquelle nous avons renommé les variables qui figurent dans $\bar{x}$ et $\bar{y}'$ par des noms distincts et différents de ceux des variables libres. Dans la règle (5), la formule $\exists \bar{x}\, \alpha$ n'est pas de la forme $\exists \bar{x}\, \alpha_1 \wedge \alpha_2$ avec $\exists \bar{x}\, \alpha_1 \in A'$ et $\alpha_2 \in A''$, et est équivalente dans T à une formule décomposée de la forme $\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\, \alpha'' \wedge (\exists \varepsilon\; vrai))$ avec $\exists \bar{x}'\, \alpha' \in A'$ et $\alpha'' \in A''$. Chaque formule $\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i$ est un élément de A'. L'ensemble I' est l'ensemble des $i \in I$ tels que $\exists \bar{y}_i' \beta_i'$ ne contienne pas d'occurrences libres d'aucune variable de $\bar{x}''$. De plus, $T \models (\exists \bar{x}''\alpha'') \leftrightarrow \alpha_*''$ avec $\alpha_*'' \in A''$. Dans la règle (6), $I \neq \emptyset$, $\exists \bar{y}'\, \beta' \in A'$, $\exists \bar{z}_i'\, \delta_i' \in A'$ et $\beta'' \in A''$. La formule $(\exists \bar{x}\bar{y}'\bar{z}_i\, \alpha \wedge \beta' \wedge \beta'' \wedge \delta_i' \wedge \varphi)^*$ est la formule $(\exists \bar{x}\bar{y}'\bar{z}_i\, \alpha \wedge \beta' \wedge \beta'' \wedge \delta_i' \wedge \varphi)$ dans laquelle nous avons renommé les variables qui figurent dans $\bar{x}$ et $\bar{y}'$ par des noms distincts et différents de ceux des variables libres.

Propriété 3.3.3.1 *Toute application répétée des règles de réécriture précédentes sur une conjonction φ de formules de travail, se termine et produit une conjonction svls ϕ de formules résolues équivalente à φ dans T.*

Preuve, première partie : Montrons que pour chaque règle de la forme $p \implies p'$ on a $T \models p \leftrightarrow p'$ et la formule p' reste une conjonction de formules de travail. il est clair que les règles 1 et 2 sont correctes dans T.

Correction de la règle (3) :

$$\neg \left[\begin{array}{l} \exists \bar{x}\, \alpha \wedge \\ \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{y}_i\, \beta_i) \end{array} \right] \Longrightarrow \neg \left[\begin{array}{l} \exists \bar{x}'\bar{x}''\, \alpha' \wedge \alpha'' \wedge \\ \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{x}'''\bar{y}_i\, \alpha''' \wedge \beta_i)^* \end{array} \right]$$

où la formule $\exists \bar{x}\, \alpha$ est équivalente dans T à une formule décomposée de la forme $\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\, \alpha'' \wedge (\exists \bar{x}'''\, \alpha'''))$ avec $\exists \bar{x}'\, \alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$, $\alpha''' \in A$, $T \models \forall \bar{x}''\alpha'' \rightarrow \exists! \bar{x}'''\alpha'''$ et $\exists \bar{x}'''\, \alpha'''$ différent de $\exists \varepsilon\, vrai$. La formule $(\exists \bar{x}'''\bar{y}_i\, \alpha''' \wedge \beta_i)^*$ est la formule $(\exists \bar{x}'''\bar{y}_i\, \alpha''' \wedge \beta_i)$ dans laquelle nous avons renommé les variables qui figurent dans $\bar{x}'''$ par des noms distincts et différents de ceux des variables libres.

Montrons la correction de cette règle. D'après les conditions d'application de cette règle, la formule $\exists \bar{x}\, \alpha$ est équivalente dans T à une formule décomposée de la forme $\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\, \alpha'' \wedge (\exists \bar{x}'''\, \alpha'''))$ avec $\exists \bar{x}'\, \alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$, $\alpha''' \in A$, $T \models \forall \bar{x}''\alpha'' \rightarrow \exists! \bar{x}'''\alpha'''$ et $\exists \bar{x}'''\, \alpha'''$ différent de $\exists \varepsilon\, vrai$. Donc le membre gauche de notre règle est équivalent dans T à

$$\neg(\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\alpha'' \wedge (\exists \bar{x}'''\alpha''' \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{y}_i\, \beta_i)))).$$

En utilisant le corollaire 3.1.0.8, la formule précédente est équivalente dans T à

$$\neg(\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\alpha'' \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{x}'''\alpha''' \wedge (\exists \bar{y}_i\, \beta_i)))).$$

D'après la définition de formule de travail, les variables quantifiées ont des noms différents de ceux des variables libres. Nous pouvons alors remonter les quantifications $\exists \bar{y}_i$. La formule précédente est donc équivalente dans T à

$$\neg(\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\alpha'' \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{x}'''\bar{y}_i\, \alpha''' \wedge \beta_i))),$$

qui en renommant les variables qui figurent dans $\bar{x}'''$ par des noms distincts et différents de ceux des variables libres est équivalente dans T à

$$\neg(\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\alpha'' \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{x}'''\bar{y}_i\, \alpha''' \wedge \beta_i)^*)),$$

Donc la règle (3) est correcte dans T.

Correction de la règle (4) :

$$\neg\begin{bmatrix} \exists\bar{x}\,\alpha \wedge \varphi \wedge \\ \neg(\exists\bar{y}'\,\beta' \wedge \beta'') \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \neg(\exists\bar{x}\,\alpha \wedge \varphi \wedge \neg(\exists\bar{y}'\,\beta')) \wedge \\ \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists\bar{x}\bar{y}'\,\alpha \wedge \beta' \wedge \beta''_i \wedge \varphi)^* \end{bmatrix}$$

où la formule $\exists\bar{x}\,\alpha$ est équivalente dans T à une formule décomposée de la forme $\exists\bar{x}'\,\alpha' \wedge (\exists\bar{x}''\,\alpha'' \wedge (\exists\varepsilon\; vrai))$ avec $\exists\bar{x}'\,\alpha' \in A'$ et $\alpha'' \in A''$. La formule $\exists\bar{y}'\,\beta'$ appartient à A'. La formule β'' appartient à A'' et n'est pas de la forme *vrai*. De plus, $T \models (\neg\beta'') \leftrightarrow \bigvee_{i\in I} \beta''_i$ avec $\beta''_i \in A$. La formule $(\exists\bar{x}\bar{y}'\,\alpha \wedge \beta' \wedge \beta''_i \wedge \varphi)^*$ est la formule $(\exists\bar{x}\bar{y}'\,\alpha \wedge \beta' \wedge \beta''_i \wedge \varphi)$ dans laquelle nous avons renommé les variables qui figurent dans $\bar{x}$ et $\bar{y}'$ par des noms distincts et différents de ceux des variables libres.

Du fait que $\exists\bar{y}'\beta' \in A'$, alors d'après le deuxième point de la définition 3.2.1.1, on a $T \models \exists?\bar{y}'\beta'$, donc en utilisant le corollaire 3.1.0.6, le membre gauche de notre règle est équivalent dans T à

$$\neg\begin{bmatrix} (\exists\bar{x}\,\alpha \wedge \varphi \wedge \neg(\exists\bar{y}'\,\beta')) \vee \\ (\exists\bar{x}\bar{y}'\,\alpha \wedge \varphi \wedge \beta' \wedge \neg\beta'') \end{bmatrix}.$$

Du fait que $T \models (\neg\beta'') \leftrightarrow (\bigvee_{i\in I} \beta''_i)$ (toujours possible d'après la condition 3 de la définition 3.2.1.1) alors la formule précédente est équivalente dans T à

$$\neg\begin{bmatrix} (\exists\bar{x}\,\alpha \wedge \varphi \wedge \neg(\exists\bar{y}'\,\beta')) \vee \\ (\exists\bar{x}\bar{y}'\,\alpha \wedge \varphi \wedge \beta' \wedge (\bigvee_{i\in I} \beta''_i)) \end{bmatrix},$$

c'est-à-dire à

$$\neg\begin{bmatrix} (\exists\bar{x}\,\alpha \wedge \varphi \wedge \neg(\exists\bar{y}'\,\beta')) \vee \\ (\exists\bar{x}\bar{y}'\, \bigvee_{i\in I}(\alpha \wedge \varphi \wedge \beta' \wedge \beta''_i)) \end{bmatrix},$$

c'est-à-dire à

$$\neg\begin{bmatrix} (\exists\bar{x}\,\alpha \wedge \varphi \wedge \neg(\exists\bar{y}'\,\beta')) \vee \\ \bigvee_{i\in I}(\exists\bar{x}\bar{y}'\,\alpha \wedge \beta' \wedge \beta''_i \wedge \varphi) \end{bmatrix},$$

et donc à

$$\begin{bmatrix} \neg(\exists\bar{x}\,\alpha \wedge \varphi \wedge \neg(\exists\bar{y}'\,\beta')) \wedge \\ \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists\bar{x}\bar{y}'\,\alpha \wedge \beta' \wedge \beta''_i \wedge \varphi) \end{bmatrix},$$

qui en notant $(\exists\bar{x}\bar{y}'\,\alpha \wedge \beta' \wedge \beta''_i \wedge \varphi)^*$ la formule $(\exists\bar{x}\bar{y}'\,\alpha \wedge \beta' \wedge \beta''_i \wedge \varphi)$ dans laquelle nous avons renommé les variables qui figurent dans $\bar{x}$ et $\bar{y}'$ par des noms distincts et différents de ceux des variables libres, est équivalente dans T à

$$\begin{bmatrix} \neg(\exists\bar{x}\,\alpha \wedge \varphi \wedge \neg(\exists\bar{y}'\,\beta')) \wedge \\ \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists\bar{x}\bar{y}'\,\alpha \wedge \beta' \wedge \beta''_i \wedge \varphi)^* \end{bmatrix}.$$

La règle (4) est donc correcte dans T.

Correction de la règle (5) :

$$\neg\begin{bmatrix} \exists\bar{x}\,\alpha \wedge \\ \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists\bar{y}'_i\,\beta'_i) \end{bmatrix} \Longrightarrow \neg\begin{bmatrix} \exists\bar{x}'\,\alpha' \wedge \alpha''_* \\ \bigwedge_{i\in I'} \neg(\exists\bar{y}'_i\,\beta'_i) \end{bmatrix}$$

où la formule $\exists \bar{x}\, \alpha$ n'est pas de la forme $\exists \bar{x}\, \alpha_1 \wedge \alpha_2$ avec $\exists \bar{x}\, \alpha_1 \in A'$ et $\alpha_2 \in A''$ et est équivalente dans T à une formule décomposée de la forme $\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}''\, \alpha'' \wedge (\exists \varepsilon\, vrai))$ avec $\exists \bar{x}'\, \alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$. Chaque formule $\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i$ est un élément de A'. I' est l'ensemble des $i \in I$ tels que $\exists \bar{y}'_i \beta'_i$ n'a pas d'occurrences libres de variables de $\bar{x}''$. De plus, $T \models (\exists \bar{x}'' \alpha'') \leftrightarrow \alpha''_*$ avec $\alpha''_* \in A''$.

Montrons la correction de cette règle. D'après les conditions d'application de cette règle, son membre gauche est équivalent dans T à

$$\neg(\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \bar{x}'' \alpha'' \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i))),$$

avec $\exists \bar{x}'\, \alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$ et tous les $\exists \bar{y}'_i\, \beta'_i$ sont des éléments de A'. Notons I_1, l'ensemble des $i \in I$ tels que x''_n n'ait pas d'occurrences libres dans $\exists \bar{y}'_i \beta'_i$. La formule précédente est équivalente dans T à

$$\neg(\exists \bar{x}' \alpha' \wedge (\exists x''_1 ... \exists x''_{n-1} \begin{bmatrix} (\bigwedge_{i \in I_1} \neg(\exists \bar{y}'_i \beta'_i)) \wedge \\ (\exists x''_n\, \alpha'' \wedge \bigwedge_{i \in I - I_1} \neg(\exists \bar{y}'_i \beta'_i)) \end{bmatrix})). \tag{3.22}$$

Du fait que $\alpha'' \in A''$ et $\exists \bar{y}'_i \beta'_i \in A'$, alors d'après la propriété 3.1.0.4 et les conditions 2 et 3 de la définition 3.2.1.1, la formule (3.22) est équivalente dans T à

$$\neg(\exists \bar{x}' \alpha' \wedge (\exists x''_1 ... \exists x''_{n-1} \begin{bmatrix} (\bigwedge_{i \in I_1} \neg(\exists \bar{y}'_i \beta'_i)) \wedge \\ (\exists x''_n\, \alpha'') \end{bmatrix})).$$

Du fait que $T \models (\exists x''_n\, \alpha'') \leftrightarrow \alpha''_n$ avec $\alpha''_n \in A''$ (toujours possible du fait de la condition 3 de la définition 3.2.1.1) alors la formule précédente est équivalente dans T à

$$\neg(\exists \bar{x}' \alpha' \wedge (\exists x''_1 ... \exists x''_{n-1} ((\bigwedge_{i \in I_1} \neg(\exists \bar{y}'_i \beta'_i)) \wedge \alpha''_n))), \tag{3.23}$$

donc à

$$\neg(\exists \bar{x}' \alpha' \wedge (\exists x''_1 ... \exists x''_{n-1}\, \alpha''_n \wedge \bigwedge_{i \in I_1} \neg(\exists \bar{y}'_i \beta'_i))). \tag{3.24}$$

En répétant les quatre dernières étapes $(n-1)$ fois et en notant I_k l'ensemble des $i \in I_{k-1}$ tels que $x''_{(n-k+1)}$ n'ait pas d'occurrences libres dans $\exists \bar{y}'_i \beta'_i$, la formule précédente est équivalente dans T à

$$\neg(\exists \bar{x}' \alpha' \wedge \alpha''_1 \wedge \textstyle\bigwedge_{i \in I_n} \neg(\exists \bar{y}'_i \beta'_i)).$$

Donc la règle (5) est correcte dans T.

Correction de la règle (6) :

$$\neg \begin{bmatrix} \exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \\ \neg \begin{bmatrix} \exists \bar{y}'\, \beta' \wedge \beta'' \\ \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{z}'_i\, \delta'_i) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \neg(\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \neg(\exists \bar{y}'\, \beta' \wedge \beta'')) \wedge \\ \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{x} \bar{y}' \bar{z}'_i\, \alpha \wedge \beta' \wedge \beta'' \wedge \delta'_i \wedge \varphi)^* \end{bmatrix}$$

où $I \neq \emptyset$, $\exists \bar{y}'\, \beta' \in A'$, $\beta'' \in A''$ et $\exists \bar{z}'_i\, \delta'_i \in A'$. La formule $(\exists \bar{x} \bar{y}' \bar{z}_i\, \alpha \wedge \beta' \wedge \beta'' \wedge \delta'_i \wedge \varphi)^*$ est la formule $(\exists \bar{x} \bar{y}' \bar{z}_i\, \alpha \wedge \beta' \wedge \beta'' \wedge \delta'_i \wedge \varphi)$ dans laquelle nous avons renommé les variables qui figurent dans $\bar{x}$ et $\bar{y}'$ par des noms distincts et différents de ceux des variables libres.

Montrons la correction de cette règle. Du fait que $\exists \bar{y}'\beta' \in A'$, alors d'après le deuxième point de la définition 3.2.1.1, on a $T \models \exists ?\bar{y}'\beta'$, donc, $T \models \exists ?\bar{y}'\beta' \wedge \beta''$. Ainsi, en utilisant le corollaire 3.1.0.7, le membre gauche de la règle est équivalent dans T à

$$\neg \left[\begin{array}{l} \exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \\ \neg \left[\; (\exists \bar{y}'\, \beta' \wedge \beta'') \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{y}'\, \beta' \wedge \beta'' \wedge (\exists \bar{z}'_i\, \delta'_i)) \; \right] \end{array} \right],$$

c'est-à-dire à

$$\neg \left[\begin{array}{l} \exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \\ \neg \left[\; (\exists \bar{y}'\, \beta' \wedge \beta'') \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{y}'\bar{z}'_i\, \beta' \wedge \beta'' \wedge \delta'_i) \; \right] \end{array} \right],$$

donc à

$$\neg \left[\begin{array}{l} \exists \bar{x}'\, \alpha \wedge \varphi \wedge \\ \left[\; (\neg(\exists \bar{y}'\, \beta' \wedge \beta'')) \vee \bigvee_{i \in I} (\exists \bar{y}'\bar{z}'_i\, \beta' \wedge \beta'' \wedge \delta'_i) \; \right] \end{array} \right].$$

Après avoir distribué les $\wedge$ sur les $\vee$ et remonté les quantifications $\exists \bar{y}'\bar{z}'_i$ on obtient la formule

$$\neg \left[\begin{array}{l} (\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \neg(\exists \bar{y}'\, \beta' \wedge \beta'')) \vee \\ \bigvee_{i \in I} (\exists \bar{x}\bar{y}'\bar{z}'_i\, \alpha \wedge \varphi \wedge \beta' \wedge \beta'' \wedge \delta'_i) \end{array} \right],$$

qui est équivalente dans T à

$$\left[\begin{array}{l} \neg(\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \neg(\exists \bar{y}'\, \beta' \wedge \beta'')) \wedge \\ \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{x}\bar{y}'\bar{z}'_i\, \alpha \wedge \varphi \wedge \beta' \wedge \beta'' \wedge \delta'_i) \end{array} \right],$$

qui, en notant $(\exists \bar{x}\bar{y}'\bar{z}'_i\, \alpha \wedge \varphi \wedge \beta' \wedge \beta'' \wedge \delta'_i)$ la formule $(\exists \bar{x}\bar{y}'\bar{z}'_i\, \alpha \wedge \varphi \wedge \beta' \wedge \beta'' \wedge \delta'_i)$ dans laquelle nous avons renommé les variables qui figurent dans $\bar{x}$ et $\bar{y}'$ par des noms distincts et différents de ceux des variables libres, est équivalente dans T à

$$\left[\begin{array}{l} \neg(\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \varphi \wedge \neg(\exists \bar{y}'\, \beta' \wedge \beta'')) \wedge \\ \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{x}\bar{y}'\bar{z}'_i\, \alpha \wedge \varphi \wedge \beta' \wedge \beta'' \wedge \delta'_i)^* \end{array} \right].$$

Donc, la règle (6) est correcte dans T.

Preuve, deuxième partie : Toute application finie des règles sur une conjonction de formules de travail produit une conjonction de formules résolues.

Montrons d'abord que toute substitution d'une sous-formule de travail dans une conjonction de formules de travail par une conjonction de formules de travail produit toujours une conjonction de formules de travail. Soit alors $\bigwedge_{i \in I} \varphi_i$ une conjonction de formules de travail. Soit φ_k avec $k \in I$ un élément de cette conjonction et dont la profondeur est notée d_k. Deux cas sont possibles

1. Soit, on remplace φ_k par une conjonction de formules de travail. Dans ce cas, soit $\bigwedge_{j \in J_k} \phi_j$ une conjonction de formules de travail équivalente à φ_k dans T. La conjonction de formules de travail $\bigwedge_{i \in I} \varphi_i$ est équivalente dans T à

$$(\bigwedge_{i \in I - \{k\}} \varphi_i) \wedge (\bigwedge_{j \in J_k} \phi_j)$$

qui bien entendu est une conjonction de formules de travail.

2. Soit, on remplace une sous-formule de travail de φ_k par une conjonction de formules de travail. Dans ce cas, soit ϕ une sous-formule de travail de φ_k de profondeur $d_\phi < d_k$ (donc ϕ est différente de φ_k). Ainsi, φ_k a, au moins, une sous-formule de travail[19] de la forme
$$\neg(\exists\bar{x}\alpha \wedge (\bigwedge_{l\in L}\psi_l) \wedge (\phi)),$$
où L est un ensemble fini (éventuellement vide) et tous les ψ_l sont des formules de travail. Soit alors $\bigwedge_{j\in J}\phi_j$ une conjonction de formules de travail équivalente à ϕ dans T. La sous-formule de travail précédente est donc équivalente dans T à
$$\neg(\exists\bar{x}\alpha \wedge (\bigwedge_{l\in L}\psi_l) \wedge (\bigwedge_{j\in J}\phi_j)),$$
qui bien entendu est une formule de travail. Ainsi, φ_k est équivalente dans T à une formule de travail et donc $\bigwedge_{i\in I}\varphi_i$ est équivalente dans T à une conjonction de formules de travail.

De 1 et 2 on déduit que : (i) toute substitution d'une sous-formule de travail dans une conjonction de formules de travail par une conjonction de formules de travail, produit toujours une conjonction de formules de travail.

D'autre part, du fait que chaque règle transforme une formule de travail en une conjonction de formules de travail, alors d'après (i), toute application finie des règles sur une conjonction de formules de travail produit une conjonction de formules de travail. Montrons maintenant que chacune de ces formules de travail est résolue.

Soit φ une formule de travail. D'après ce qu'on vient de démontrer, toute application finie de nos règles sur une conjonction de formules de travail produit une conjonction ϕ de formules de travail. Supposons alors qu'aucune règle ne puisse s'appliquer et que l'une des formules de travail de ϕ ne soit pas résolue. Soit alors ψ cette formule. Deux cas sont à étudier

Cas 1 : ψ est une formule de travail de profondeur supérieure à 2. Donc ψ contient une sous-formule de la forme
$$\neg\left[\begin{array}{l}\exists\bar{x}\,\alpha\wedge\psi_1\wedge\\ \neg\left[\ \exists\bar{y}\,\beta\wedge\bigwedge_{i\in I}\neg(\exists\bar{z}_i\,\delta_i)\ \right]\end{array}\right],$$
où ψ_1 est une conjonction de formules de travail, I est un ensemble fini non vide et α, β, et δ_i sont des éléments de A. Soit $(\exists\bar{y}'\beta' \wedge (\exists\bar{x}''\beta'' \wedge (\exists\bar{y}'''\beta''')))$ la formule décomposée de $\exists\bar{y}\beta$ et soit $(\exists\bar{z}_i'\delta_i' \wedge (\exists\bar{z}_i''\delta_i'' \wedge (\exists\bar{z}_i'''\delta_i''')))$ la formule décomposée de $\exists\bar{z}_i\delta_i$. Si $\exists\bar{y}'''\beta'''$ est différente de la formule $\exists\varepsilon\,vrai$, alors la règle (3) peut encore s'appliquer, ce qui contredit nos suppositions. Donc supposons que
$$\exists\bar{y}'''\beta''' = \exists\varepsilon\,vrai. \tag{3.25}$$
S'il existe $k \in I$ tel que $\exists\bar{z}_k'''\delta_k'''$ ne soit pas le formule $\exists\varepsilon\,vrai$, alors la règle (3) peut encore s'appliquer, ce qui contredit nos suppositions. Donc, supposons que
$$\exists\bar{z}_i'''\delta_i''' = \exists\varepsilon\,vrai, \tag{3.26}$$
pour tout $i \in I$. S'il existe $k \in I$ tel que $\exists\bar{z}_k\beta_k$ ne soit pas de la forme $\exists\bar{z}_k'\beta_k' \wedge \beta_k''$ avec $\exists\bar{z}_k'\beta_k' \in A'$ et $\beta_k'' \in A''$, alors du fait que l'on ait (3.26), la règle (5) peut s'appliquer ce qui contredit nos suppositions. Supposons que
$$chaque\ \exists\bar{z}_i\delta_i\ soit\, de\, la\, forme\ \exists\bar{z}_i'\delta_i' \wedge \delta_i''\ avec\, \exists\bar{z}_i'\delta_i' \in A'\, et\, \delta_i'' \in A''. \tag{3.27}$$

[19] En considérant que l'ensemble des sous-formules de n'importe quelle formule φ contient également la formule φ.

S'il existe $i \in I$ tel que δ_i'' ne soit pas la formule *vrai*, alors du fait que l'on ait (3.25), la règle (4) peut s'appliquer ce qui contredit nos suppositions. Supposons alors que tous les δ_i''' sont de la forme *vrai* et donc, en utilisant (3.27), on obtient

$$\textit{tous les } \exists \bar{z}_i \beta_i \textit{ appartiennent a } A'. \tag{3.28}$$

Si $\exists \bar{y}\beta$ n'est pas de la forme $\exists \bar{y}'\beta' \wedge \beta''$ avec $\exists \bar{y}'\beta' \in A'$ et $\beta'' \in A''$, alors du fait que l'on ait (3.25) et (3.28), la règle (5) peut s'appliquer, ce qui contredit nos suppositions. Donc supposons que

$$\exists \bar{y}\beta \textit{ soit de la forme } \exists \bar{y}'\beta' \wedge \beta'' \textit{ avec } \exists \bar{y}'\beta' \in A' \textit{ et } \beta'' \in A''. \tag{3.29}$$

Du fait de (3.29) et (3.28), la règle (6) peut encore s'appliquer ce qui contredit toutes nos suppositions.
Cas 2 : ψ est une formule de travail de la forme

$$\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{y}_i\, \beta_i)$$

et une au moins des propriétés suivantes est satisfaite

1. *faux* est une sous formule de α,
2. il existe $i \in I$ tel que β_i est la formule *vrai* ou *faux*,
3. il existe $i \in I$ tel que $\exists \bar{y}_i \beta_i \notin A'$,
4. $\exists \bar{x}\alpha$ n'est pas de la forme $\exists \bar{x}'\alpha' \wedge \alpha''$ avec $\exists \bar{x}'\alpha' \in A'$ et $\alpha'' \in A''$.

Si la condition (1) est vraie, alors la règle (2) peut s'appliquer, ce qui contredit nos suppositions. Si la condition (2) est vraie, alors les règles (1) et (2) peuvent encore s'appliquer, ce qui contredit nos suppositions. Si la condition (3) est vérifiée alors les règles (3) ou (4) ou (5) (avec $I = \emptyset$) peuvent encore s'appliquer. Si la condition (4) est satisfaite, alors d'après le point précédent $\exists \bar{y}_i \beta_i \in A'$ et donc la règle (3) ou (5) peut s'appliquer, ce qui contredit nos suppositions.

Des cas 1 et 2, nos suppositions sont toujours fausses donc ψ est une formule résolue et donc ϕ est une conjonction de formules résolues.

Preuve, troisième partie : Montrons que toute application répétée des règles précédentes termine. La terminaison de ces règles est assez intuitive et se démontre en utilisant les mêmes fonctions que celles utilisées dans les théories infini-décomposables. Néanmoins la nouvelle règle (4) nécessite une fonction beaucoup plus complexe que la fonction β définie dans le chapitre 3. Nous préférons alors donner une démonstration plus simple en suivant les conditions d'application des règles. Soit alors φ une formule de travail. La règle (3) traite d'abord les deux niveaux les plus imbriqués de φ en décomposant l'avant dernier niveau et en envoyant la troisième partie dans le dernier niveau de φ. La règle (3) s'applique maintenant sur le dernier niveau en supprimant la troisième partie de la décomposition. C'est maintenant au tour de la règle (5) de s'appliquer sur les niveaux les plus imbriqués de φ, en éliminant les quantifications de la deuxième partie. La règle (4) crée des formules contenant uniquement la première partie de la décomposition en diminuant la cardinalité des ensembles traités. Après plusieurs applications et du fait que les ensembles sont de cardinalité finie, il ne reste plus qu'à appliquer la règle (4) puis la règle (6) pour diminuer la profondeur de φ. Ces étapes sont répétées et leur application se termine du fait que la profondeur d'une formule de travail soit finie. □

3.3.4 Algorithme de résolution de propositions

Ayant une proposition ψ, la résolution ou décision de ψ dans T se fait de la manière suivante

1. Transformer la formule ψ en une formule normalisée, puis en une conjonction de formules de travail φ svls et équivalente à ψ dans T.
2. Appliquer les règles de réécriture précédentes sur φ autant de fois que possible. A la fin, on obtient une conjonction ϕ de formules résolues.

Du fait que la transformation de la proposition ψ en conjonction de formules de travail φ soit svls, alors φ est une conjonction de formules de travail sans variables libres. D'après la propriété 3.3.3.1, l'application de nos règles sur φ produit une conjonction svls ϕ de formules résolues et donc une conjonction ϕ de formules résolues sans variables libres. D'après la propriété 3.3.2.4, ϕ est soit la formule *vrai*, soit la formule $\bigwedge_{i\in I} \neg vrai$. Du fait que T soit décomposable, elle a au moins un modèle et donc soit $T \models \phi$, soit $T \models \neg\phi$ et par conséquent soit $T \models \psi$, soit $T \models \neg\psi$. Cet algorithme peut très bien s'appliquer sur des formules ayant des variables libres et produit à la fin une conjonction de formules résolues ayant au moins une variable libre. En utilisant la propriété 3.3.2.5 on a alors le corollaire suivant

Corollaire 3.3.4.1 *Si T est zéro-infini-décomposable alors toute formule est équivalente dans T soit à vrai, soit à faux, soit a une combinaison booléenne de formules de la forme $\exists\bar{x}'\,\alpha' \wedge \alpha''$ avec $\exists\bar{x}'\,\alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$ et ayant au moins une variable libre.*

Ce corollaire est une autre preuve de la complétude des théories zéro-infini-décomposables.

3.4 Application à la construction d'arbres sur un ensemble ordonné $\mathcal{T}_{ord}$

3.4.1 Axiomatisation

Soit F un ensemble **infini** de symboles de fonction, tous d'arité non nulle. Soit R un ensemble de symboles de relation contenant les symboles de relation $<$ et *num* d'arités respectives $2, 1$. Si t_1 et t_2 sont des termes, alors on écrit $t_1 < t_2$ pour $<(t_1, t_2)$. La construction d'arbres sur un ensemble ordonnée est la théorie du premier ordre, notée $\mathcal{T}_{ord}$, de signature $F \cup R$ et dont les axiomes sont l'ensemble infini des propositions de l'une des formes suivantes

1 $\forall\bar{x}\forall\bar{y}\, f\bar{x} = f\bar{y} \rightarrow \bigwedge_i x_i = y_i$,
2 $\forall\bar{x}\forall\bar{y}\, \neg f\bar{x} = g\bar{y}$,
3 $\forall\bar{x}\exists!\bar{z}\, \bigwedge_i z_i = t_i(\bar{z},\bar{x})$,
4 $\forall x\, num\, x \rightarrow \neg x < x$,
5 $\forall x\forall y\forall z\, num\, x \wedge num\, y \wedge num\, z \rightarrow ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$,
6 $\forall x\forall y\, (num\, x \wedge num\, y) \rightarrow (x < y \vee x = y \vee y < x)$,
7 $\forall x\forall y\, (num\, x \wedge num\, y) \rightarrow (x < y \rightarrow (\exists z\, num\, z \wedge x < z \wedge z < y))$,
8 $\forall x\, num\, x \rightarrow (\exists y\, num\, y \wedge x < y)$,
9 $\forall x\, num\, x \rightarrow (\exists y\, num\, y \wedge y < x)$,
10 $\forall\bar{x}\, \neg num\, f\bar{x}$,
11 $\forall x\forall y\, x < y \rightarrow (num\, x \wedge num\, y)$,
12 $\exists x\, num\, x$,

où f et g sont des symboles de fonction distincts pris dans F, x, y, z des variables, $\bar{x}$ un vecteur de variables x_i, $\bar{y}$ un vecteur de variables y_i, $\bar{z}$ un vecteur de variables z_i toutes distinctes et $t_i(\bar{z},\bar{x})$ un terme qui commence par un élément de F suivi de variables prises dans $\bar{x}$ ou $\bar{z}$.

Les schémas d'axiomes 1, 2 et 3 sont les trois schémas d'axiomes de la théorie des arbres finis ou infinis : le schéma d'axiome 1, dit *d'explosion*, le schéma d'axiome 2, dit de *conflit de symboles* et le schéma d'axiome 3, dit de *solution unique*. Les axiomes 4, 5,..., 9 concernent la relation $<$, vue comme un *ordre strict* 4,5, *total* 6, *dense* 7 et *sans extrême* 8,9. Les axiomes 10, 11 et 12 sont dits de *typage*. Les formules $num\, x$ et $\neg num\, x$ sont appelées *contraintes de typage* car elle associe un type à la variable x.

Présentons maintenant quatre propriétés qui sont vraies dans tout modèle de $\mathcal{T}_{ord}$. Nous en aurons besoin pour montrer la zéro-infini-décomposabilité de cette théorie. Notons que les trois premières propriétés ne sont que de simples extensions des propriétés 3.2.4.1, 3.2.4.2 et 3.2.4.3 définies dans la théorie T_{ord} de l'ordre strict, total, dense et sans extrêmes à la section 3.2.4. La première introduit l'élimination de quantificateur de Fourier pour les éléments ordonnés. La seconde montre l'inversion de la relation $<$ par introduction d'égalités et de contraintes de typage et en utilisant le fait que l'ordre soit total. La troisième est une conséquence du fait que la relation d'ordre soit dense et sans extrêmes et introduit la notion de zéro-infini solutions dans tout modèle de $\mathcal{T}_{ord}$. La quatrième montre l'infinité d'arbres dans tout modèle de $\mathcal{T}_{ord}$ en utilisant les axiomes 1 et 2 de $\mathcal{T}_{ord}$.

Propriété 3.4.1.1

$$\mathcal{T}_{ord} \models \left[\exists x\, num\, x \wedge \begin{bmatrix} (\bigwedge_{i\in I} x < y_i \wedge num\, y_i) \wedge \\ (\bigwedge_{j\in J} z_j < x \wedge num\, z_j) \end{bmatrix}\right] \leftrightarrow \bigwedge_{i\in I}\bigwedge_{j\in J}(z_j < y_i \wedge num\, y_i \wedge num\, z_j).$$

Propriété 3.4.1.2

$$\mathcal{T}_{ord} \models \forall xy\, (\neg(x < y \wedge num\, x \wedge num\, y)) \leftrightarrow \begin{bmatrix} \neg num\, x \vee \\ \neg num\, y \vee \\ (x = y \wedge num\, x \wedge num\, y) \vee \\ (y < x \wedge num\, x \wedge num\, y) \end{bmatrix}.$$

Propriété 3.4.1.3 *Soit M un modèle de $\mathcal{T}_{ord}$, soit J et K des ensembles finis d'individus de M et soit $\varphi'(x)$ la M-formule*

$$num\, x \wedge \ (\bigwedge_{j\in J} j < x \wedge num\, j) \wedge (\bigwedge_{k\in K} x < k \wedge num\, k).$$

L'ensemble des individus i de M tels que $M \models \varphi'(i)$ est infini ou vide.

Propriété 3.4.1.4 *Soient M un modèle de $\mathcal{T}_{ord}$ et f un symbole de fonction d'arité non nulle. L'ensemble des individus i de M, tels que $M \models \neg num\, i$, et l'ensemble des individus i de M, tels que $M \models \exists \overline{x}\, i = f\overline{x}$, sont infinis.*

3.4.2 Le modèle standard de $\mathcal{T}_{ord}$

La théorie $\mathcal{T}_{ord}$ a pour modèle standard le modèle A_{ord} des *arbres aux feuilles ordonnées*, défini comme suit, à partir d'un ensemble infini D[20], disjoint de F, et muni d'une relation d'ordre total, strict, dense et sans extrêmes :

Signature de A_{ord} La signature de A_{ord} est la même que celle de $\mathcal{T}_{ord}$.

Domaine de A_{ord} Le domaine $\mathcal{A}_{ord}$ de A_{ord} est constitué des arbres éventuellement infinis construits sur $F \cup D$. Chaque élément d'arité n de F est considéré comme une étiquette d'arité n et chaque élément de D est considéré comme une étiquette d'arité 0. Du fait que tous les symboles de fonction de F soient d'arité non nulle, alors chaque arbre élément du domaine de

[20] Par exemple l'ensemble des rationnels ou l'ensemble des réels.

ce modèle contient des feuilles qui appartiennent à l'ensemble D et donc des feuilles ordonnées par la relation d'ordre total, strict, dense et sans extrêmes dans D. Ce qui explique l'appellation *arbre aux feuilles ordonnées.*

Opérations de $\boldsymbol{A_{ord}}$ A chaque symbole $f \in F$ d'arité n, on associe l'opération de *construction* $f^{A_{ord}} : {\mathcal{A}_{ord}}^n \to \mathcal{A}_{ord}$, où $f(a_1, \ldots, a_n)$ est l'arbre dont la racine est étiquetée f et qui a pour suite de fils $a_1, \ldots, a_n$.

Relations de $\boldsymbol{A_{ord}}$ Au symbole de relation unaire num, on associe l'ensemble $num^{A_{ord}}$ des arbres qui n'ont qu'un seul nœud. Au symbole de relation binaire $<$ on associe l'ensemble des couples (x, y) tels que $x \in num^{A_{ord}}$, $y \in num^{A_{ord}}$ et la valeur de x soit strictement inférieure à la valeur de y.

La seule difficulté pour montrer que A_{ord} est un modèle de $\mathcal{T}_{ord}$, est de montrer que l'axiome 3 de solution unique de $\mathcal{T}_{ord}$ est vrai dans A_{ord}. Pour ce point on peut reprendre la démonstration donnée en [16].

3.4.3 Brique et brique résolue dans $\mathcal{T}_{ord}$

Définition 3.4.3.1 *On appelle* brique*, toute conjonction α de formules à plat, telle que toute variable x figurant dans α, ait au moins une occurrence dans une sous-formule de α de la forme $num\, x$ ou $\neg num\, x$. Une brique α sans occurrences du symbole "$=$" est dite* relationnelle*. Une brique α sans occurrences du symbole "$<$" et où chaque variable a une occurrence dans au moins une des équations de α est dite* équationnelle.

Exemple 3.4.3.2 *la formule*

$$x = fy \wedge y < z \wedge num\, y \wedge num z,$$

n'est pas une brique car la variable x n'a pas de contrainte de typage dans cette formule. Par contre la formule

$$x = fy \wedge y < z \wedge \neg num\, x \wedge num\, y \wedge num z,$$

est une brique. La brique

$$x = fy \wedge y = x \wedge \neg num\, x \wedge num\, y \wedge num z,$$

n'est pas équationnelle car la variable z n'apparaît dans aucune équation de cette brique. Les briques vrai, faux et

$$x < y \wedge y < z \wedge num\, x \wedge num\, y \wedge num z,$$

sont des briques relationnelles.

Définition 3.4.3.3 *Soient α une brique et $\bar{x}$ un vecteur de variables. Une variable u est dite* accessible *dans $\exists \bar{x}\alpha$ si u est une variable libre dans $\exists \bar{x}\alpha$, ou α a une sous-formule de la forme $y = t(u) \wedge \neg num\, y$ avec $t(u)$ un terme contenant u et y est une variable accessible. Dans le dernier cas, l'équation $y = t(u)$ est dite accessible dans $\exists \bar{x}\alpha$.*

Du fait des schémas d'axiomes 1 et 2 de $\mathcal{T}_{ord}$ on a la propriété suivante

Propriété 3.4.3.4 *Soit α une brique. Si toutes les variables de $\bar{x}$ sont accessibles dans $\exists \bar{x}\, \alpha$ alors $\mathcal{T}_{ord} \models \exists ? \bar{x}\alpha$.*

Suppose que les variables de V soient ordonnées par un ordre total, strict, dense et sans extrêmes, noté $\succ$.

Définition 3.4.3.5 *Une brique α est dite* bien typée *si elle ne contient pas de sous-formules de la forme*
- $num\, x \wedge \neg num\, x$,
- $x = f\bar{y} \wedge num\, x$, *avec* $f \in F$,
- $x = y \wedge num\, x \wedge \neg num\, y$,
- $x = y \wedge \neg num\, x \wedge num\, y$,
- $x < y \wedge \neg num\, x$,
- $y < x \wedge \neg num\, x$.

Définition 3.4.3.6 *Une brique α est dite $(\succ)$-résolue dans $\mathcal{T}_{ord}$ si*

1. *α est bien typée,*
2. *α ne contient pas de sous-formules de la forme $\beta \wedge faux$, où β est une formule différente de la formule vrai,*
3. *si $x = y$ est une sous-formule de α, alors $x \succ y$,*
4. *tous les membres gauches des équations de α sont distincts,*
5. *si $x < y$ est une sous-formule de α alors x et y n'apparaissent dans aucun membre gauche des équations de α,*
6. *α ne contient pas de sous-formules de la forme*

$$x_0 < x_1 \wedge x_1 < x_2 \wedge ... \wedge x_{n-1} < x_n \wedge x_n < x_0.$$

Exemple 3.4.3.7 *Soient x, y, z et w des variables telles que $x \succ y \succ z \succ w$. La brique*

$$x = fy \wedge y < z \wedge num\, x \wedge num\, y \wedge numz,$$

n'est pas une brique $(\succ)$-résolue car elle contient une sous formule de la forme $x = fy \wedge num\, x$. Les briques vrai, faux et

$$x = fy \wedge y = z \wedge w < z \wedge \neg num\, x \wedge num\, y \wedge numz \wedge numw,$$

sont des briques $(\succ)$-résolues.

Propriété 3.4.3.8 *Toute brique est équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à une brique svls $(\succ)$-résolue.*

Preuve. Pour montrer cette propriété, nous introduisant les règles de réécriture suivantes qui transforment une brique quelconque en une brique svls $(\succ)$-résolue équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$. Appliquer la règle $p_1 \Longrightarrow p_2$ à la brique p, signifie remplacer dans p, une sous-formule p_1 par la formule p_2, en considérant le connecteur $\wedge$ associatif et commutatif.

$$
\begin{array}{lll}
(1) & y = f\bar{x} \wedge num\, y & \Longrightarrow\ faux, \\
(2) & x < y \wedge \neg num\, x & \Longrightarrow\ faux, \\
(3) & y < x \wedge \neg num\, x & \Longrightarrow\ faux, \\
(4) & x = y \wedge num\, x \wedge \neg num\, y & \Longrightarrow\ faux, \\
(5) & x = y \wedge num\, y \wedge \neg num\, x & \Longrightarrow\ faux, \\
(6) & num\, x \wedge \neg num\, x & \Longrightarrow\ faux, \\
(7) & faux \wedge \alpha & \Longrightarrow\ faux, \\
(8) & x = fy_1...y_m \wedge x = gz_1...z_n & \Longrightarrow\ faux, \\
(9) & x = fy_1...y_n \wedge x = fz_1...z_n & \Longrightarrow\ x = fy_1...y_n \wedge \bigwedge_{i\in 1..n} y_i = z_i, \\
(10) & x_0 < x_1 \wedge ... \wedge x_{n-1} < x_n \wedge x_n < x_0 & \Longrightarrow\ faux, \\
(11) & x = x & \Longrightarrow\ vrai, \\
(12) & y = x & \Longrightarrow\ x = y, \\
(13) & x = y \wedge x = z & \Longrightarrow\ x = y \wedge y = z, \\
(14) & x = y \wedge x = fz_1...z_n & \Longrightarrow\ x = y \wedge y = fz_1...z_n, \\
(15) & x = y \wedge x < z & \Longrightarrow\ x = y \wedge y < z, \\
(16) & x = y \wedge z < x & \Longrightarrow\ x = y \wedge z < y,
\end{array}
$$

où f et g sont des éléments distincts pris dans F, x, y, z des variables, $\bar{x}$ un vecteur de variables et α une formule quelconque. Les règles (12),...,(16) sont appliquées uniquement si $x \succ y$. Montrons que toute application répétée de ces règles sur une brique termine, maintient l'équivalence dans $\mathcal{T}_{ord}$ et produit bien une brique svls ($\succ$)-résolue équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$.

Preuve, première partie : L'application des règles se termine. Du fait que les variables qui figurent dans nos formules soient ordonnées par la relation d'ordre $\succ$, on peut les numéroter par des entiers positifs de telle façon que $x \succ y \leftrightarrow no(x) > no(y)$, où $no(x)$ est le numéro de la variable x. Considérons le 4-uplet (n_1, n_2, n_3, n_4) où les n_i sont les entiers non négatifs suivants

- n_1 est le nombre de sous-formules de la forme $x = fy_1...y_n$, avec $f \in F$,
- n_2 est le nombre d'occurrences de formules atomiques.
- n_3 est la somme des $no(x)$ pour toute occurrence d'une variable x,
- n_4 est le nombre de formules de la forme $x = y$, avec $y \succ x$.

pour chaque règle, il existe un indice i tel que l'application de cette règle diminue ou ne change pas la valeur des n_j avec $1 \leq j < i$, et diminue la valeur de n_i. L'indice i est égal à : 1 pour la règle (1), 2 pour les règles (2), ..., (7), 1 pour les règles (8) et (9), 2 pour la règle (10), 3 pour la règle (11), 4 pour la règle (12) et enfin 3 pour les règles (13), (14), (15) et (16). A chaque séquence de formules obtenue par application finie de nos règles, on peut associer une suite (n_1, n_2, n_3, n_4) qui est strictement décroissante dans l'ordre lexicographique. Du fait que ces n_i's soient des entiers positifs, ils ne peuvent pas être négatifs, donc cette suite est finie et l'application de nos règles se termine.

Preuve, deuxième partie : Les règles conservent l'équivalence dans $\mathcal{T}_{ord}$. La règle (1) conserve l'équivalence dans $\mathcal{T}_{ord}$ du fait de l'axiome 10 et des propriétés de l'égalité. Les règles (2) et (3) conservent l'équivalence dans $\mathcal{T}_{ord}$ du fait de l'axiome 11. Les règles (4) et (5) conservent l'équivalence dans $\mathcal{T}_{ord}$ du fait des propriétés de l'égalité. Les règles (6) et (7) sont évidentes dans $\mathcal{T}_{ord}$. La règle (8) conserve l'équivalence dans $\mathcal{T}_{ord}$ du fait de l'axiome 2. La règle (9) conserve l'équivalence dans $\mathcal{T}_{ord}$ du fait de l'axiome 1. La règle (10) conserve l'équivalence dans $\mathcal{T}_{ord}$ du fait des axiomes 4 et 5. Les règles (11),...,(16) conservent l'équivalence dans $\mathcal{T}_{ord}$ du fait des propriétés de l'égalité.

Preuve, troisième partie : L'application des règles se termine par une brique ($\succ$)-résolue. Supposons que l'application des règles sur une brique ϕ se termine par une formule φ qui ne soit pas une brique ($\succ$)-résolue. D'après la définition 3.4.3.6, soit φ n'est pas une brique, soit φ est une brique et une des six conditions de la définition 3.4.3.6 n'est pas vérifiée. Si φ n'est pas une brique, alors, il existe une variable x de φ telle que $num\, x$ ou $\neg num\, x$ ne soit pas une sous-formule de φ. Du fait que chaque règle produise une conjonction svls de formules atomiques à partir d'une conjonction de formules atomiques et du fait que ϕ soit une brique, et que les seules règles qui suppriment des occurrences de sous-formules de la forme $num\, x$ ou $\neg num\, x$ sont celles qui produisent *faux*, alors du fait que la règle (7) ne puisse plus s'appliquer, φ est la formule *faux*, ce qui contredit l'hypothèse que φ ne soit pas une brique. Si maintenant φ est une brique et au moins une des six conditions de la définition 3.4.3.6 n'est pas satisfaite alors, suivant que les conditions 1, 2, 3, 4, 5, 6 ne soient pas satisfaites, une des règles (1),(2),(3),(4),(5),(6) ou (7) ou (11),(12) ou (8),(9),(13),(14) ou (15),(16) ou (10) s'applique, ce qui contredit nos suppositions. □

En utilisant l'axiome 3 de $\mathcal{T}_{ord}$ on a la propriété suivante

Propriété 3.4.3.9 *Soient α une brique équationnelle ($\succ$)-résolue différente de la formule faux et $\bar{x}$ l'ensemble des membres gauches des équations de α. Soit α^* la conjonction de contraintes de typage des variables de α qui n'appartiennent pas à $\bar{x}$. On a*

$$\mathcal{T}_{ord} \models \alpha^* \rightarrow \exists! \bar{x}\, \alpha.$$

Exemple 3.4.3.10 *Soient x, y et z des variables telles que $x \succ y \succ z$ et soit α la brique $x = fy \wedge y = z \wedge \neg num\, x \wedge num\, y \wedge num z$. On a bien*

$$\mathcal{T}_{ord} \models num\, z \rightarrow (\exists! xy\, x = fy \wedge y = z \wedge \neg num\, x \wedge num\, y \wedge num z).$$

Cette propriété provient de l'axiome 3 en utilisant le fait que les briques soient équationnelles et ($\succ$)-résolues.

3.4.4 $\mathcal{T}_{ord}$ est zéro-infini-décomposable

Théorème 3.4.4.1 *La théorie $\mathcal{T}_{ord}$ est zéro-infini-décomposable.*

Preuve. Montrons que $\mathcal{T}_{ord}$ satisfait aux conditions de la définition 3.2.1.1.

Choix des ensembles $\Psi(u)$, A, A' et A''

Soit BR l'ensemble des briques. Les ensembles $\Psi(u)$, A, A' et A'' sont choisis de la manière suivante

- $\Psi(u)$ contient l'ensemble des formules de la forme $\exists \bar{y}\, u = f\bar{y}$ avec $f \in F$,
- A est l'ensemble BR,
- A' est l'ensemble des formules de la forme $\exists \bar{x}' \alpha'$, où
  - α' est une brique équationnelle ($\succ$)-résolue différente de la formule *faux* et où l'ordre $\succ$ est tel que toutes les variables de $\bar{x}'$ soient plus grandes que les variables libres de $\exists \bar{x}' \alpha'$,
  - toutes les équations de α' et toutes les variables de $\bar{x}'$ sont accessibles dans $\exists \bar{x}' \alpha'$,
- A'' est l'ensemble des briques relationnelles ($\succ$)-résolues qui sont différentes de la formule *faux*.

Bien entendu, BR est fermé pour la conjonction, A' contient des formules de la forme $\exists \bar{x}' \alpha'$ avec $\alpha' \in BR$ et A'' est un sous-ensemble de BR.

Montrons maintenant que la théorie $\mathcal{T}_{ord}$ satisfait aux cinq conditions de la définition 3.2.1.1.

$\mathcal{T}_{ord}$ satisfait à la première condition de la définition 3.2.1.1

Montrons que toute formule de la forme $\exists \overline{x}\, \alpha \wedge \psi$, avec $\alpha \in A$ et ψ une formule quelconque, est équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à une formule, svls, de la forme

$$\exists \overline{x}'\, \alpha' \wedge (\exists \overline{x}''\, \alpha'' \wedge (\exists \overline{x}'''\, \alpha''' \wedge \psi))), \tag{3.30}$$

avec $\exists \overline{x}' \alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$, $\alpha''' \in A$ et $\mathcal{T}_{ord} \models \forall \bar{x}''\, \alpha'' \rightarrow \exists! \bar{x}''' \alpha'''$.

Prenons pour $\succ$ un ordre tel que toutes les variables de $\bar{x}$ soient plus grandes que les variables libres de $\exists \bar{x} \alpha$. Soit alors β une formule $(\succ)$-résolue équivalente à α dans $\mathcal{T}_{ord}$, (β existe du fait de la propriété 3.4.3.8). Notons X l'ensemble des variables de $\bar{x}$, Y_{ac} l'ensemble des variables accessibles dans $\exists \bar{x} \beta$ et *mbg* l'ensemble des variables qui ont des occurrences dans un membre gauche d'une équation de β. Si β est équivalente à *faux* dans $\mathcal{T}_{ord}$, alors la formule $\exists \overline{x}\, \alpha \wedge \psi$ est équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à une formule décomposée de la forme

$$\exists \varepsilon\, \mathit{faux} \wedge (\exists \varepsilon\, \mathit{vrai} \wedge (\exists \varepsilon\, \mathit{vrai} \wedge \psi)).$$

Sinon β est une conjonction $(\succ)$-résolue d'équations et de relations à plat. La formule $\exists \overline{x}\, \alpha \wedge \psi$ est équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à une formule décomposée de la forme (3.30) où :

- $\bar{x}'$ contient les éléments de $X \cap Y_{ac}$,
- $\bar{x}''$ contient les éléments de $(X - Y_{ac}) - mbg$.
- $\bar{x}'''$ contient les éléments de $(X - Y_{ac}) \cap mbg$.
- α' est de la forme $\alpha'_1 \wedge \alpha'_2$ où α'_1 est la conjonction de toutes les équations accessibles dans $\exists \bar{x} \beta$, et où α'_2 est la conjonction de toutes les sous-formules de β de la forme $\mathit{num}\, x$ ou $\neg \mathit{num}\, x$ avec x ayant au moins une occurrence dans α'_1.
- α'' est de la forme $\alpha''_1 \wedge \alpha''_2$ où α''_1 est la conjonction de toutes les sous-formules de β de la forme $\mathit{num}\, x$ ou $\neg \mathit{num}\, x$ avec $x \notin \bar{x}'''$, et où α''_2 est la conjonction de toutes les sous-formules de β de la forme $x < y$.
- α''' est de la forme $\alpha'''_1 \wedge \alpha'''_2$ où α'''_1 est la conjonction de toutes les équations qui ne sont pas accessibles dans $\exists \bar{x} \beta$, et où α'''_2 est la conjonction de toutes les sous-formules de β de la forme $\mathit{num}\, x$ ou $\neg \mathit{num}\, x$ avec x ayant au moins une occurrence dans α'''_1.

D'après notre construction, il est clair que $\exists \bar{x}' \alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$ et $\alpha''' \in A$. De plus, d'après la propriété 3.4.3.9, on a directement $\mathcal{T}_{ord} \models \forall \bar{x}'' \alpha'' \rightarrow \exists! \bar{x}''' \alpha'''$. Montrons maintenant que (3.30) et $\exists \bar{x} \alpha \wedge \psi$ sont équivalentes dans $\mathcal{T}_{ord}$. Soient X', X'' et X''' les ensembles des variables des vecteurs[21] de $\bar{x}'$, $\bar{x}''$ et $\bar{x}'''$. Si β est la formule *faux*, alors l'équivalence de la décomposition est évidente. Sinon, β est une brique $(\succ)$-résolue qui ne contient pas la sous-formule *faux*. Donc d'après notre construction nous avons : $X = X' \cup X'' \cup X'''$, $X' \cap X'' = \emptyset$, $X' \cap X''' = \emptyset$, $X'' \cap X''' = \emptyset$, pour tout $x''_i \in X''$ on a $x''_i \notin var(\alpha')$ et pour tout $x'''_i \in X'''$ on a $x'''_i \notin var(\alpha' \wedge \alpha'')$. Ces propriétés proviennent de la définition de brique $(\succ)$-résolue et de l'ordre $\succ$ qui a été choisi tel que les variables quantifiées de $\exists \bar{x}\, \alpha$ soient plus grandes que les variables libres de $\exists \bar{x}\, \alpha$. D'autre part, chaque équation et chaque relation de β apparaît dans $\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha'''$ et chaque équation et chaque relation de $\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha'''$ apparaît dans β et donc $T_{ord} \models \beta \leftrightarrow (\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha''')$. Nous avons montré que les quantifications sont cohérentes et que l'équivalence $\mathcal{T}_{ord} \models \beta \leftrightarrow \alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha'''$ est satisfaite. D'après la propriété 3.4.3.8, on a $\mathcal{T}_{ord} \models \alpha \leftrightarrow \beta$ et donc la décomposition maintient l'équivalence dans $\mathcal{T}_{ord}$.

$\mathcal{T}_{ord}$ satisfait à la deuxième condition de la définition 3.2.1.1

Montrons que si $\exists \bar{x}' \alpha' \in A'$ alors $\mathcal{T}_{ord} \models \exists ? \bar{x}' \alpha'$. Du fait que $\exists \bar{x}' \alpha' \in A'$ et d'après le choix de l'ensemble A', toutes les variables de $\bar{x}'$ sont accessibles dans $\exists \bar{x}' \alpha'$. En utilisant alors la propriété

[21] Bien entendu, si $\bar{x} = \varepsilon$ alors $X = \emptyset$

3.4.3.4 on obtient $\mathcal{T}_{ord} \models \exists?\bar{x}'\alpha'$.

Montrons maintenant que si y est une variable libre dans $\exists\bar{x}'\alpha'$ alors $\mathcal{T}_{ord} \models \exists?y\bar{x}'\,\alpha'$, ou il existe $\psi(u) \in \Psi(u)$ avec $\mathcal{T}_{ord} \models \forall y\,(\exists\bar{x}'\,\alpha') \rightarrow \psi(y)$. Soit y une variable libre de $\exists\bar{x}'\alpha'$. Trois cas se présentent

Soit, y apparaît dans une sous-formule de α' de la forme $y = t(\bar{x}', \bar{z}', y)$, où $\bar{z}'$ est l'ensemble des variables libres de $\exists\bar{x}'\alpha'$, diminué de la variable y, et où $t(\bar{x}', \bar{z}', y)$ est un terme formé d'un élément de F suivi de variables prises dans $\bar{x}'$ ou $\bar{z}'$ ou $\{y\}$. Dans ce cas, la formule $\exists\bar{x}'\alpha'$ implique dans $\mathcal{T}_{ord}$ la formule $\exists\bar{x}'\,y = t(\bar{x}', \bar{z}', y)$, qui implique dans $\mathcal{T}_{ord}$ la formule $\exists\bar{x}'\bar{z}'w\,y = t(\bar{x}', \bar{z}', w)$, où $y = t(\bar{x}', \bar{z}', w)$ est la formule $y = t(\bar{x}', \bar{z}', y)$ dans laquelle nous avons remplacé toute occurrence libre de y dans le terme $t(\bar{x}', \bar{z}', y)$ par la variable w. D'après le choix de l'ensemble $\Psi(u)$, la formule $\exists\bar{x}'\bar{z}'w\,u = t(\bar{x}', \bar{z}', w)$ est bien un élément de $\Psi(u)$.

Soit, y apparaît dans une sous-formule de α', de la forme $y = z$. D'après le choix de l'ensemble A', l'ordre $\succ$ est tel que les variables de $\bar{x}'$ soient plus grandes que les variables libres de $\exists\bar{x}'\alpha'$. D'autre part, d'après la définition 3.4.3.6 des formules $(\succ)$-résolues, on a $y \succ z$. Donc z est une variable libre dans $\exists\bar{x}'\alpha'$. Du fait que y n'apparaisse dans aucun autre membre gauche d'une équation de α' (car α' est $(\succ)$-résolue), et du fait que toutes les variables de $\bar{x}$ soient accessibles dans $\exists\bar{x}'\alpha'$, alors toutes les variables de $\bar{x}'$ restent accessibles dans $\exists\bar{x}'y\,\alpha'$ et pour chaque valeur de z il existe au plus une valeur pour y. En utilisant alors la propriété 3.4.3.4 on a bien $\mathcal{T}_{ord} \models \exists?\bar{x}'y\,\alpha'$.

Soit, y apparaît uniquement dans les membres droits des équations de α'. D'après le choix de l'ensemble A', toutes les variables de $\bar{x}'$ et toutes les équations de α' sont accessibles dans $\exists\bar{x}'\alpha'$. Du fait que y n'apparaisse dans aucun membre gauche d'une équation de α', alors la variable y ainsi que les variables de $\bar{x}'$ sont accessibles dans $\exists\bar{x}'y\,\alpha'$. En utilisant alors la propriété 3.4.3.4 on a bien $\mathcal{T}_{ord} \models \exists?\bar{x}'y\,\alpha'$.

Dans tous les cas, $\mathcal{T}_{ord}$ satisfait à la deuxième condition de la définition 3.2.1.1.

$\mathcal{T}_{ord}$ satisfait à la troisième condition de la définition 3.2.1.1

Montrons que $\mathcal{T}_{ord}$ satisfait aux trois points de la troisième condition de la définition 3.2.1.1.

$\mathcal{T}_{ord}$ satisfait au premier point de la troisième condition de la définition 3.2.1.1

Montrons d'abord que si $\alpha'' \in A''$ alors la formule $\neg\alpha''$ est équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à une disjonction d'éléments de A, c'est-à-dire à une disjonction de briques. Soit α'' une formule de A''. D'après le choix de l'ensemble A'', α'' est une formule de la forme

$$\begin{bmatrix} (\bigwedge_{\ell \in L} num\, z_\ell) \wedge (\bigwedge_{k \in K} \neg num\, v_k) \wedge \\ \bigwedge_{i \in I} \bigwedge_{j \in J_i} (x_i < y_{ij} \wedge num\, x_i \wedge num\, y_{ij}) \end{bmatrix}.$$

La formule $\neg\alpha''$ est donc équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à

$$\begin{bmatrix} (\bigvee_{\ell \in L} \neg num\, z_\ell) \vee (\bigvee_{k \in K} \neg\neg num\, v_k) \vee \\ \bigvee_{i \in I} \bigvee_{j \in J_i} \neg(x_i < y_{ij} \wedge num\, x_i \wedge num\, y_{ij}) \end{bmatrix},$$

qui d'après la propriété 3.4.1.2 est équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à

$$\begin{bmatrix} (\bigvee_{\ell \in L} \neg num\, z_\ell) \vee (\bigvee_{k \in K} num v_k) \vee \\ \bigvee_{i \in I} \bigvee_{j \in J_i} \begin{bmatrix} (\neg num\, y_{ij}) \vee \\ (\neg num\, x_i) \vee \\ (y_{ij} < x_i \wedge num\, x_i \wedge num\, y_{ij}) \vee \\ (x_i = y_{ij} \wedge num\, x_i \wedge num\, y_{ij})) \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

qui est bien une disjonction de briques.

$\mathcal{T}_{ord}$ satisfait au deuxième point de la troisième condition de la définition 3.2.1.1

Montrons maintenant que si $\alpha'' \in A''$ alors, pour toute variable x'', la formule $\exists x''\alpha''$ est équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à un élément de A''. Soit α'' une formule de A'', trois cas se présentent

Soit, x'' n'a pas d'occurrences libres dans α''. Donc la formule $\exists x''\,\alpha''$ est équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à α'' qui est bien un élément de A''.

Soit, la formule $\exists x''\,\alpha''$ est de la forme $\exists x''\,\alpha''_1 \wedge \neg num\, x''$ avec $\alpha''_1 \in A''$ et x'' n'a pas d'occurrences libres dans α''_1. Elle est donc équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à $\alpha''_1 \wedge (\exists x''\,\neg num\, x'')$, qui d'après la propriété 3.4.1.4, est équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à α''_1, qui est bien un élément de A''.

Soit, la formule $\exists x''\,\alpha''$ est de la forme

$$\exists x''\,\alpha''_1 \wedge num\, x'' \wedge \begin{bmatrix} (\bigwedge_{i\in I} x'' < y_i \wedge num\, y_i)\wedge \\ (\bigwedge_{j\in J} z_j < x'' \wedge num\, z_j), \end{bmatrix},$$

avec $\alpha''_1 \in A''$ et x'' n'a pas d'occurrences libres dans α''_1. Elle est donc équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à

$$\alpha''_1 \wedge (\exists x''\, num\, x'' \wedge \begin{bmatrix} (\bigwedge_{i\in I} x'' < y_i \wedge num\, y_i)\wedge \\ (\bigwedge_{j\in J} z_j < x'' \wedge num\, z_j), \end{bmatrix}),$$

qui d'après la propriété 3.4.1.1, est équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à

$$\alpha''_1 \wedge \textstyle\bigwedge_{i\in I} \bigwedge_{j\in J}(z_j < y_i \wedge num\, y_i \wedge num\, z_j),$$

qui est bien un élément de A''.

$\mathcal{T}_{ord}$ satisfait au troisième point de la troisième condition de la définition 3.2.1.1

Etant donné $\varphi(x) \in A''$, montrons que, pour toute variable x, on a $\mathcal{T}_{ord} \models \exists_{o\,\infty}^{\Psi(u)} x\,\varphi(x)$. Soient M un modèle de $\mathcal{T}_{ord}$ et $\exists x\,\varphi'(x)$ une instanciation quelconque de $\exists \bar{x}\,\varphi(x)$ par des individus de M telle que $M \models \exists x\,\varphi'(x)$. Etant donnée une condition quelconque de la forme

$$M \models \varphi'(i) \wedge \neg\psi_1(i) \wedge \cdots \wedge \neg\psi_n(i),$$

avec les $\psi_j(u)$ des éléments de $\Psi(u)$, il suffit de montrer qu'il existe une infinité d'individus i de M qui satisfont à cette condition. Cette condition peut d'ailleurs être remplacée par la condition plus forte

$$M \models \begin{pmatrix} num\, i\, \vee \\ \psi_{n+1}(i) \end{pmatrix} \wedge \varphi'(i) \wedge \neg\psi_1(i) \wedge \cdot\cdot \wedge \neg\psi_n(i),$$

où $\psi_{n+1}(u)$ est un élément de $\Psi(u)$ qu'on a pu choisir distinct de $\psi_1(u), \ldots, \psi_n(u)$, car l'ensemble F des symboles de fonction est infini. Du fait que, pour tout k entre 1 et n, on a

$$\mathcal{T}_{ord} \models num\, x \rightarrow \neg\psi_k(x),\ \ (axiome\, 10)$$

et

$$\mathcal{T}_{ord} \models \psi_{n+1}(x) \rightarrow \neg\psi_k(x),\ \ (axiome\, 2)$$

alors la condition précédente se simplifie en

$$M \models (num\, i \wedge \varphi'(i)) \vee (\psi_{n+1}(i) \wedge \varphi'(i)),$$

et donc finalement, sachant que $M \models \exists x\, \varphi'(x)$, il suffit de montrer qu'il existe une infinité d'individus i de M tels que

$$M \models num\, i \wedge \varphi'(i) \;\text{ ou }\; M \models \psi_{n+1}(i) \wedge \varphi'(i). \tag{3.31}$$

Deux cas se présentent

Soit, la formule $num\, x$ apparaît dans $\varphi'(x)$. Du fait que $\varphi'(x)$ soit une instanciation d'une brique relationnelle résolue et que $M \models \exists x\, \varphi'(x)$, la formule $num\, x \wedge \varphi'(x)$ est équivalente dans M à une M-formule de la forme

$$num\, x \wedge \;(\bigwedge_{j\in J} j < x \wedge num\, j) \wedge (\bigwedge_{k\in K} x < k \wedge num\, k).$$

D'après la propriété 3.4.1.3 et du fait que $M \models \exists x\; num\, x \wedge \varphi'(x)$, il existe une infinité d'individus i de M tels que $M \models num\, i \wedge \varphi'(i)$ et donc tels que (3.31).

Soit, la formule $num\, x$ n'apparaît pas dans $\varphi'(x)$. Du fait que $\varphi'(x)$ soit une instanciation d'une brique relationnelle résolue et que $M \models \exists x\, \varphi'(x)$, la M-formule $\psi_{n+1}(x) \wedge \varphi'(x)$ est équivalente dans M à $\psi_{n+1}(x)$. D'après la propriété 3.4.1.4, il existe une infinité d'individus i de M tels que $M \models \psi_{n+1}(i)$, donc tels que $M \models \psi_{n+1}(i) \wedge \varphi'(i)$ et donc tels que (3.31).

Dans tous les cas, $\mathcal{T}_{ord}$ satisfait à la troisième condition de la définition 3.2.1.1.

$\mathcal{T}_{ord}$ satisfait à la quatrième condition de la définition 3.2.1.1

Montrons que toute conjonction de formules à plat φ est équivalente, dans $\mathcal{T}_{ord}$, à une disjonction de briques. Pour cela, il suffit de montrer que toute formule à plat est équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à une disjonction de briques, puis effectuer une série de distribution des $\wedge$ sur les $\vee$. Soit alors φ une formule à plat. Si elle est de la forme *vrai*, *faux* ou $num\, x$ alors φ est une brique. Sinon les équivalences suivantes, après distribution des $\wedge$ sur les $\vee$ donnent les combinaisons cherchées

$$\mathcal{T}_{ord} \models x_0 = x_1 \leftrightarrow x_0 = x_1 \wedge \begin{bmatrix} (num\, x_0 \vee \neg num\, x_0) \wedge \\ (num\, x_1 \vee \neg num\, x_1) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{T}_{ord} \models x_0 < x_1 \leftrightarrow x_0 < x_1 \wedge \begin{bmatrix} (num\, x_0 \vee \neg num\, x_0) \wedge \\ (num\, x_1 \vee \neg num\, x_1) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{T}_{ord} \models x_0 = f x_1 ... x_n \leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0 = f x_1 ... x_n \wedge \\ \bigwedge_{i\in 0..n} (num\, x_i \vee \neg num\, x_i) \end{bmatrix}.$$

$\mathcal{T}_{ord}$ satisfait à la cinquième condition

Montrons que pour toute formule sans variables libres de la forme $\exists \bar{x}'\alpha' \wedge \alpha''$ avec $\exists \bar{x}'\alpha' \in A'$ et $\alpha'' \in A''$ on a $\bar{x} = \varepsilon$, $\alpha' \in \{vrai, faux\}$ et $\alpha'' \in \{vrai, faux\}$. Du fait que la formule $\exists \bar{x}'\alpha' \wedge \alpha''$ ne contienne pas de variables libres, aucune de ses variables et aucune de ses équations n'est accessible dans $\exists \bar{x}'\alpha' \wedge \alpha''$. Ainsi, d'après le choix de l'ensemble A', la formule $\exists \bar{x}'\alpha'$ est de la forme $\exists \varepsilon\, vrai$. D'autre part, d'après le choix de l'ensemble A'', la formule *vrai* est la seule formule de A'' qui n'ait pas de variables libres. Donc $\mathcal{T}_{ord}$ satisfait à la cinquième condition de la définition 3.2.1.1.

Nous avons montré que $\mathcal{T}_{ord}$ satisfait aux cinq conditions de la définition 3.2.1.1. Donc $\mathcal{T}_{ord}$ est une théorie zéro-infini-décomposable.

3.4.5 Résolution de propositions dans $\mathcal{T}_{ord}$

Soit à résoudre la proposition φ_1 suivante

$$\neg(\exists y \forall xv \exists z\, y = fz \wedge y = fx \wedge v < z \wedge \neg num\, y \wedge num\, z). \tag{3.32}$$

Notons que les variables x et v n'ont pas de contraintes de typage. Cette formule est vraie dans $\mathcal{T}_{ord}$ car les variables x et v sont quantifiées universellement ce qui contredit le fait que $v < z$.

Montrons maintenant ce que donne notre algorithme de résolution pour cette formule. Transformons d'abord la formule (3.32) en une formule normalisée équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ en utilisant la propriété 3.3.1.2. On obtient alors la formule normalisée suivante

$$\neg\begin{bmatrix} \exists y\, vrai \wedge \\ \neg\begin{bmatrix} \exists xv\, vrai \wedge \\ \neg(\exists z\, y = fz \wedge y = fx \wedge v < z \wedge \neg num\, y \wedge num\, z) \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Transformons maintenant cette formule normalisée en une conjonction de formules de travail en utilisant la propriété 3.3.2.2. La formule précédente est donc équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à la formule de travail suivante

$$\neg\begin{bmatrix} \exists y\, vrai \wedge \\ \neg\begin{bmatrix} \exists xv\, vrai \wedge \\ \neg(\exists z_1\, y = fz_1 \wedge y = fx \wedge v < z_1 \wedge \neg num\, x \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_1 \wedge \neg num\, v) \\ \wedge \\ \neg(\exists z_2\, y = fz_2 \wedge y = fx \wedge v < z_2 \wedge \neg num\, x \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_2 \wedge num\, v) \\ \wedge \\ \neg(\exists z_3\, y = fz_3 \wedge y = fx \wedge v < z_3 \wedge num\, x \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_3 \wedge \neg num\, v) \\ \wedge \\ \neg(\exists z_4\, y = fz_4 \wedge y = fx \wedge v < z_4 \wedge num\, x \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_4 \wedge num\, v) \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \tag{3.33}$$

Les trois briques

- $\exists z_1\, y = fz_1 \wedge y = fx \wedge v < z_1 \wedge \neg num\, x \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_1 \wedge \neg num\, v$,
- $\exists z_2\, y = fz_2 \wedge y = fx \wedge v < z_2 \wedge \neg num\, x \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_2 \wedge num\, v$,
- $\exists z_3\, y = fz_3 \wedge y = fx \wedge v < z_3 \wedge num\, x \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_3 \wedge \neg num\, v$,

sont équivalentes dans $\mathcal{T}_{ord}$ à la brique ($\succ$)-résolue *faux*. On peut alors appliquer la règle (5) avec $I = \emptyset$ trois fois sur la formule (3.33). Celle-ci est alors équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à

$$\neg\begin{bmatrix} \exists y\, vrai \wedge \\ \neg\begin{bmatrix} \exists xv\, vrai \wedge \\ \neg(\exists z_1\, faux) \\ \wedge \\ \neg(\exists z_2\, faux) \\ \wedge \\ \neg(\exists z_3\, faux) \\ \wedge \\ \neg(\exists z_4\, y = fz_4 \wedge y = fx \wedge v < z_4 \wedge num\, x \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_4 \wedge num\, v) \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

qui, en appliquant la règle (2) trois fois, est équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à

$$\neg\begin{bmatrix} \exists y\, vrai \wedge \\ \neg\begin{bmatrix} \exists xv\, vrai \wedge \\ \neg(\exists z_4\, y = fz_4 \wedge y = fx \wedge v < z_4 \wedge num\, x \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_4 \wedge num\, v) \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \tag{3.34}$$

Passons maintenant à la sous-formule

$$\exists z_4\, y = f z_4 \wedge y = fx \wedge v < z_4 \wedge num\, x \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_4 \wedge num\, v. \tag{3.35}$$

Choisissons alors l'ordre $\succ$ tel que $z_4 \succ x \succ y \succ v$. En utilisant les règles de réécriture de la propriété 3.4.3.8, la brique

$$y = f z_4 \wedge y = fx \wedge v < z_4 \wedge num\, x \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_4 \wedge num\, v,$$

est équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à la brique $(\succ)$-résolue

$$y = f z_4 \wedge z_4 = x \wedge v < x \wedge num\, x \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_4 \wedge num\, v.$$

Donc, la formule (3.35) est équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à la formule décomposée suivante

$$\begin{bmatrix} \exists z_4\, y = f z_4 \wedge z_4 = x \wedge num\, x \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_4 \wedge \\ (\exists \varepsilon\, v < x \wedge num\, x \wedge num\, v \wedge \\ (\exists \varepsilon\, vrai)) \end{bmatrix}.$$

On peut alors appliquer la règle (5) sur la formule (3.34) avec $I = \emptyset$. La formule (3.34) est alors équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à

$$\neg \begin{bmatrix} \exists y\, vrai \wedge \\ \neg \begin{bmatrix} \exists xv\, vrai \wedge \\ \neg \begin{bmatrix} \exists z_4\, y = f z_4 \wedge z_4 = x \wedge num\, x \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_4 \wedge \\ (v < x \wedge num\, x \wedge num\, v) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Notons que la sous-formule $(v < x \wedge num\, x \wedge num\, v)$ représente la formule α''_* dans la règle (5). Du fait que

- $(\exists z_4\, y = f z_4 \wedge z_4 = x \wedge num\, x \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_4) \in A'$,
- $(v < x \wedge num\, x \wedge num\, v) \in A''$,
- $\mathcal{T}_{ord} \models \neg(v < x \wedge num\, x \wedge num\, v) \leftrightarrow \begin{bmatrix} (x < v \wedge num\, x \wedge num\, v) \vee \\ (v = x \wedge num\, x \wedge num\, v) \vee \\ \neg num\, x \vee \\ \neg num\, v \end{bmatrix}$

alors on peut appliquer la règle (4). La formule précédente est donc équivalente dans T_{ord} à

$$\neg \begin{bmatrix} \exists y\, vrai \wedge \\ \neg \begin{bmatrix} \exists xv\, vrai \wedge \\ \neg(\exists z_4\, y = f z_4 \wedge z_4 = x \wedge num\, x \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_4) \end{bmatrix} \\ \wedge \\ \neg \begin{bmatrix} \exists x_1 v_1 z_5\, y = f z_5 \wedge z_5 = x_1 \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_5 \wedge x_1 < v_1 \wedge num\, x_1 \wedge num\, v_1 \end{bmatrix} \\ \wedge \\ \neg \begin{bmatrix} \exists x_2 v_2 z_6\, y = f z_6 \wedge z_6 = x_2 \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_6 \wedge v_2 = x_2 \wedge num\, x_2 \wedge num\, v_2 \end{bmatrix} \\ \wedge \\ \neg \begin{bmatrix} \exists x_3 v_3 z_7\, y = f z_7 \wedge z_7 = x_3 \wedge num\, x_3 \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_7 \wedge \neg num\, v_3 \end{bmatrix} \\ \wedge \\ \neg \begin{bmatrix} \exists x_4 v_4 z_8, y = f z_8 \wedge z_8 = x_4 \wedge num\, x_4 \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_8 \wedge \neg num\, x_4 \end{bmatrix} \end{bmatrix},$$

qui, du fait que la dernière sous-formule de travail soit équivalente à la formule $(\succ)$-résolue *faux* (car on a $num\, x_4 \wedge \neg num\, x_4$) et après application des règles (5) et (2) avec $I = \emptyset$, est équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à

$$\neg \left[\begin{array}{l} \exists y\, vrai \wedge \\ \neg \left[\begin{array}{l} \exists xv\, vrai \wedge \\ \neg(\exists z_4\, y = f z_4 \wedge z_4 = x \wedge num\, x \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_4) \end{array} \right] \\ \wedge \\ \neg \left[\exists x_1 v_1 z_5\, y = f z_5 \wedge z_5 = x_1 \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_5 \wedge x_1 < v_1 \wedge num\, x_1 \wedge num\, v_1 \right] \\ \wedge \\ \neg \left[\exists x_2 v_2 z_6\, y = f z_6 \wedge z_6 = x_2 \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_6 \wedge v_2 = x_2 \wedge num\, x_2 \wedge num\, v_2 \right] \\ \wedge \\ \neg \left[\exists x_3 v_3 z_7\, y = f z_5 \wedge z_7 = x_3 \wedge num\, x_3 \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_7 \wedge \neg num\, v_3 \right] \end{array} \right]. \tag{3.36}$$

Du fait que la formule $\exists xv\, vrai$ soit équivalente à la formule décomposée $\exists \varepsilon\, vrai \wedge (\exists xv\, vrai \wedge (\exists \varepsilon\, vrai))$ et $(\exists z_4\, y = f z_4 \wedge z_4 = x \wedge num\, x \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_4) \in A'$, alors on peut appliquer la règle (5) avec $I = \neg(\exists z_4\, y = f z_4 \wedge z_4 = x \wedge num\, x \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_4)$. La formule (3.36) est donc équivalente dans $\mathcal{T}_{ord}$ à

$$\neg \left[\begin{array}{l} \exists y\, vrai \wedge \\ \neg \left[\exists \varepsilon\, vrai \right] \\ \wedge \\ \neg \left[\exists x_1 v_1 z_5\, y = f z_5 \wedge z_5 = x_1 \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_5 \wedge x_1 < v_1 \wedge num\, x_1 \wedge num\, v_1 \right] \\ \wedge \\ \neg \left[\exists x_2 v_2 z_6\, y = f z_6 \wedge z_6 = x_2 \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_6 \wedge v_2 = x_2 \wedge num\, x_2 \wedge num\, v_2 \right] \\ \wedge \\ \neg \left[\exists x_3 v_3 z_7\, y = f z_7 \wedge z_7 = x_3 \wedge num\, x_3 \wedge \neg num\, y \wedge num\, z_7 \wedge \neg num\, v_3 \right] \end{array} \right]. \tag{3.37}$$

qui, en appliquant la règle (1), est équivalente à *vrai* dans $\mathcal{T}_{ord}$. Donc la formule φ_1 est vraie dans $\mathcal{T}_{ord}$.

3.5 Discussion et conclusion partielle

Nous avons introduit dans ce chapitre la classe des théories zéro-infini-décomposables, qui est une extension de la classe des théories infini-décomposables, en maintenant le principe de décomposition des conjonctions quantifiées de formules à plat et en introduisant le quantificateur zéro-infini à la place du quantificateur infini. L'algorithme de résolution de propositions défini dans ce chapitre contient une règle supplémentaire par rapport à celui des théories infini-décomposables, qui associe un traitement particulier aux formules de la forme $\neg(\exists \bar{x}'\, \alpha' \wedge \alpha'')$ avec $\exists \bar{x}'\, \alpha' \in A'$ et $\alpha'' \in A''$. Bien entendu, cet algorithme, tout comme celui défini dans le chapitre 2, est un algorithme de résolution de propositions qui pour toute proposition donne soit *vrai* soit *faux*. Il peut également s'appliquer aux formules ayant des variables libres et donne dans ce cas une conjonction ϕ de formules résolues facilement transformable en une combinaison booléenne de formules de base. Malheureusement, il ne garantit pas que la formule ϕ ne soit ni vraie ni fausse dans T, si celle-ci contient au moins une variable libre et n'est pas capable de présenter sous forme claire et précise les solutions des variables libres de ϕ. Nous avons également montré que les théories T_{ord} et $\mathcal{T}_{ord}$ sont zéro-infini-décomposables et donc complètes.

D'autre part, en introduisant la théorie $\mathcal{T}_{ord}$, nous avons touché aux premières intuitions du mélange d'une théorie T quelconque avec la théorie des arbres finis ou infinis. Il serait alors intéressant de définir une manière automatique pour combiner une théorie T quelconque à la théorie des arbres finis ou infinis et montrer sa zéro-inifni-décomposabilité ! Ceci fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 4

Extension en arbres T^* d'une théorie T du premier ordre

Sommaire

Nous présentons dans ce chapitre une manière automatique pour combiner une théorie T du premier ordre avec la théorie des arbres finis ou infinis. Une des difficultés majeures de cette combinaison réside dans le fait que la théorie T et la théorie des arbres éventuellement infinis peuvent avoir des signatures non disjointes, c'est-à-dire l'existence d'au moins un symbole de fonction ayant deux comportements différents selon que l'on soit dans la théorie des arbres ou dans la théorie T. Il faut donc d'abord trouver un sens sémantique à cette combinaison, puis donner une axiomatisation harmonieuse de ce mélange. Pour cela, nous définissons sémantiquement cette combinaison comme étant une extension en arbres des éléments des modèles de la théorie T. Ainsi, l'axiomatisation de l'extension en arbres de T, notée T^*, se fait essentiellement à partir des trois axiomes modifiés de Michael Maher sur la théorie des arbres finis ou infinis [33] et de l'axiomatisation de la théorie T enrichie de contraintes de typage. Nous donnons également une définition formelle du modèle standard M^* de la théorie T^* à partir du modèle standard M de T. Pour montrer la complétude de la théorie T^*, nous introduisons une nouvelle classe de théories que nous appelons *flexible* et montrons que si T est une théorie flexible, alors son extension en arbres, c'est-à-dire T^*, est zéro-infini-décomposable et par conséquent, complète. Les théories flexibles sont des théories ayant des propriétés agréables qui nous permettent de manipuler facilement les formules du premier ordre en utilisant notamment les propriétés des quantificateurs vectoriels. Nous terminons ce chapitre par une application à l'extension en arbres T^*_{ad} de la théorie T_{ad} des rationnels additifs ordonnés. On montre alors que T_{ad} est flexible et par conséquent que T^*_{ad} est complète. Notons que ce chapitre à fait l'objet des publications suivantes [15], [20].

4.1 Extension en arbres T^* de T

Du fait que nous allons manipuler constamment des théories de signatures différentes, notamment S et S^*, alors nous allons précéder les termes : équation, relation, terme, formule, modèle et théorie des préfixes S ou S^* selon que l'on soit dans la signature S ou S^*. Un S-terme, par exemple, est un terme construit sur la signature S, alors qu'un S^*-terme est un terme construit sur la signature S^*. On renvoie le lecteur au chapitre 1 pour de plus amples détails.

4.1.1 Axiomatisation de T^*

Rappelons tout d'abord les trois axiomes de la théorie des arbres finis ou infinis. Soit alors S une signature contenant uniquement un ensemble infini F de symboles de fonction. L'axiomatisation de cette S-théorie est l'ensemble des S-propositions de l'une des formes suivantes

$$\begin{array}{ll} 1 & \forall \bar{x} \forall \bar{y}\, f\bar{x} = f\bar{y} \rightarrow \bigwedge_i x_i = y_i, \\ 2 & \forall \bar{x} \forall \bar{y}\, \neg f\bar{x} = g\bar{y}, \\ 3 & \forall \bar{x} \exists! \bar{z}\, \bigwedge_i z_i = t_i(\bar{z}, \bar{x}), \end{array}$$

avec f et g deux symboles de fonction distincts pris dans F, x, y, z des variables, $\bar{x}$ un vecteur de variables x_i, $\bar{y}$ un vecteur de variables y_i, $\bar{z}$ un vecteur de variables z_i toutes distinctes et $t_i(\bar{x}, \bar{z})$ un S-terme qui commence par un élément de F suivi de variables prises dans $\bar{x}$ ou $\bar{z}$.

Rappelons également que le premier axiome est appelé *axiome de l'explosion*, le deuxième *axiome de conflit de symboles* et le troisième *axiome de solution unique.*

Fixons-nous maintenant pour toute cette section une signature S contenant un ensemble F de symboles de fonction et un ensemble R de symboles de relation, ainsi qu'une signature S^* contenant :

- un ensemble infini $F^* = F \cup F_A$ où F_A est un ensemble infini de symboles de fonction, tous d'arité non nulle, et disjoint de F.
- un ensemble $R^* = R \cup \{p\}$ de symboles de relation, contenant R ainsi qu'un symbole de relation p d'arité 1.

Soit T une S-théorie. L'extension en arbres de la S-théorie T est la S^*-théorie T^* dont les axiomes sont l'ensemble infini des S^*-propositions de l'une des formes suivantes, avec $\bar{x}$ un vecteur de variables x_i et $\bar{y}$ un vecteur de variables y_i

1. L'explosion : pour tout $f \in F^*$:

$$\forall \bar{x} \forall \bar{y}\ \neg pf\bar{x} \wedge \neg pf\bar{y} \wedge f\bar{x} = f\bar{y} \rightarrow \bigwedge_i x_i = y_i$$

2. Conflit de symboles : Soit f et g deux symboles de fonction distincts pris dans F^* :

$$\forall \bar{x} \forall \bar{y}\ f\bar{x} = g\bar{y} \rightarrow pf\bar{x} \wedge pg\bar{y}$$

3. Solution unique

$$\forall \bar{x} \forall \bar{y}\ (\bigwedge_i px_i) \wedge (\bigwedge_j \neg py_j) \rightarrow \exists! \bar{z} \bigwedge_k (\neg pz_i \wedge z_k = t_k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}))$$

où $\bar{z}$ est un vecteur de variables distinctes z_i, $t_k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un S^*-terme qui commence par un symbole de fonction $f_k \in F^*$ suivi par des variables prises dans $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, de plus, si $f_k \in F$, alors le S^*-terme $t_k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ contient au moins une variable de $\bar{y}$ ou $\bar{z}$

4. Relations de R : pour tout $r \in R$,

$$\forall \bar{x}\ r\bar{x} \rightarrow \bigwedge_i px_i$$

5. Opérations de F : pour tout $f \in F$,

$$\forall \bar{x}\ pf\bar{x} \leftrightarrow \bigwedge_i px_i$$

(Si f est d'arité 0 alors cet axiome s'écrit pf)

6. Eléments en dehors de T : pour tout $f \in F^* - F$,

$$\forall \bar{x}\ \neg pf\bar{x}$$

7. Existence d'au moins un élément satisfaisant p (uniquement si F ne contient pas de symboles de fonction d'arité 0) :

$$\exists x\, px,$$

8. Extension en arbres des axiomes de T : Tout axiome obtenu en utilisant les transformations suivantes sur chaque axiome φ de T : Tant qu'il est possible remplacer toute sous-formule de φ de la forme $\exists \bar{x}\, \psi$, avec ψ une S^*-formule qui n'est pas de la forme $(\bigwedge px_i) \wedge \psi'$, par $\exists \bar{x}\, (\bigwedge px_i) \wedge \psi$ et toute sous formule de φ de la forme $\forall \bar{x}\, \psi$, avec ψ une S^*-formule qui n'est pas de la forme $(\bigwedge px_i) \rightarrow \psi'$, par $\forall \bar{x}\, (\bigwedge px_i) \rightarrow \psi$.

4.1.2 Le modèle standard M^* de T^*

Soit $M = (\mathcal{M}, \mathcal{F}, \mathcal{R})$ un S-modèle d'une S-théorie T avec $\mathcal{F}$ un ensemble de fonctions dans $\mathcal{M}$ indicés par les éléments de F, et $\mathcal{R}$ un ensemble de relations dans $\mathcal{M}$ indicées par les éléments de R.

Soit maintenant $M^* = (\mathcal{M}^*, \mathcal{F}^*, \mathcal{R}^*)$ un S^*-modèle avec $\mathcal{F}^*$ un ensemble infini de fonctions dans $\mathcal{M}^*$ indicés par les éléments de F^* et contenant l'ensemble $\mathcal{F}$, et $\mathcal{R}^* = \mathcal{R} \cup \{p\}$ un ensemble de relations dans $\mathcal{M}^*$ indicées par les éléments de R^* et contenant l'ensemble $\mathcal{R}$ ainsi qu'une relation unaire p.

L'extension en arbres T^* de la S-théorie T a pour modèle standard l'extension en arbres du S-modèle M, c'est-à-dire, le S^*-modèle $M^* = (\mathcal{M}^*, \mathcal{F}^*, \mathcal{R}^*)$ défini comme suit[22] :

Domaine de M^* : Le domaine $\mathcal{M}^*$ est l'ensemble des arbres étiquetés par $F^* \cup \mathcal{M}$ en considérant chaque symbole n-aire dans F^* comme une étiquette d'arité n et chaque individu de $\mathcal{M}$ comme une étiquette d'arité 0 et tel que chaque sous-arbre étiqueté par $F \cup \mathcal{M}$ est évalué dans $\mathcal{M}$ et réduit à une feuille étiqueté par un élément de $\mathcal{M}$. Du fait que F^* ne contienne pas de symboles de fonction d'arité nulle, alors toutes les feuilles de tout arbre a du domaine de M^* sont des éléments de $\mathcal{M}$. On comprend mieux maintenant le sens sémantique de l'extension en arbres d'une théorie T qui n'est finalement rien d'autre qu'une construction d'arbres sur les individus de chaque modèle M_i de T sans jamais créer de nouvelles feuilles n'appartenant pas au domaine de M_i.

[22] En notant $(f^{M^*})_{f \in F^*}$ et $(r^{M^*})_{r \in R^*}$ pour $\mathcal{F}^*$ respectivement $\mathcal{R}^*$.

Opérations de M^* : a chaque symbole de fonction n-aire f dans F^* est associé l'application $f^{M^*} : \mathcal{M}^{*n} \to \mathcal{M}^*$ telle que $f(a_1,..,a_n)$ est le résultat de f sur $(a_1,..,a_n)$ dans $\mathcal{M}$, si $f \in F$ et $a_i \in \mathcal{M}$ pour tout $i \in \{1,...,n\}$, et est l'arbre dont la racine est étiquetée f et dont la suite de fils est $(a_1,..,a_n)$ sinon.

Relations de M^* : a chaque symbole de relation n-aire r de $R^* - \{p\}$ est associé l'ensemble $r^{M^*} = r^M$. Au symbole de relation unaire p est associé l'ensemble $p^{M^*} = \mathcal{M}$.

La seule difficulté pour montrer que M^* est un modèle de T^*, est de montrer que l'axiome 3 de solution unique est vrai dans M^*. Pour ce point on peut reprendre la démonstration donnée en [16].

4.1.3 Exemples

Extension en arbres de la théorie vide

Soit $S = \emptyset$ une signature vide et T la S-théorie vide. Cette théorie vide a bien entendu comme modèle tout ensemble non vide quelconque. Soit maintenant $S^* = F^* \cup \{p\}$ une signature telle que F^* est un ensemble infini de symboles de fonction, tous d'arité non nulle, et p un symbole de relation unaire. L'extension en arbres de T est la S^*-théorie T^* dont l'ensemble des axiomes consiste en l'ensemble des propositions de l'une des formes suivantes

1. L'explosion : pour tout $f \in F^*$:

$$\forall \bar{x} \forall \bar{y} \ \neg pf\bar{x} \wedge \neg pf\bar{y} \wedge f\bar{x} = f\bar{y} \to \bigwedge_i x_i = y_i$$

2. Conflit de symboles : Soit f et g deux symboles de fonction distincts pris dans F^* :

$$\forall \bar{x} \forall \bar{y} \ f\bar{x} = g\bar{y} \to pf\bar{x} \wedge pg\bar{y}$$

3. Solution unique

$$\forall \bar{x} \forall \bar{y} \ (\bigwedge_i px_i) \wedge (\bigwedge_j \neg py_j) \to \exists! \bar{z} \bigwedge_k (\neg pz_i \wedge z_k = t_k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}))$$

   où $\bar{z}$ est un vecteur de variables distinctes z_i, $t_k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un S^*-terme qui commence par un symbole de fonction $f_k \in F^*$ suivi par des variables prises dans $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$,

4. Eléments en dehors de T : pour tout $f \in F^*$,

$$\forall \bar{x} \ \neg pf\bar{x}$$

5. Existence d'au moins un élément satisfaisant p :

$$\exists x \, px.$$

Utilisons maintenant l'axiome 4, pour simplifier ces axiomes. Nous allons également remplacer le symbole p par $feuille$ afin de clarifier les axiomes de cette théorie et leur donner un sens clair. On obtient alors l'axiomatisation suivante

1. L'explosion : pour tout $f \in F^*$:

$$\forall \bar{x} \forall \bar{y} \ f\bar{x} = f\bar{y} \to \bigwedge_i x_i = y_i$$

2. Conflit de symboles : Soit f et g deux symboles de fonction distincts pris dans F^* :

$$\forall\bar{x}\forall\bar{y}\ f\bar{x} = g\bar{y}$$

3. Solution unique

$$\forall\bar{x}\exists!\bar{z} \bigwedge_k z_k = t_k(\bar{x}, \bar{z})$$

   où $\bar{z}$ est un vecteur de variables distinctes z_i, $t_k(\bar{x}, \bar{z})$ un S^*-terme qui commence par un symbole de fonction $f_k \in F^*$ suivi par des variables prises dans $\bar{x}$ ou $\bar{z}$,

4. Eléments en dehors de T : pour tout $f \in F^*$,

$$\forall\bar{x}\ \neg feuille\, f\bar{x}$$

5. Existence d'au moins un élément satisfaisant $feuille$:

$$\exists x\, feuille\, x.$$

Cette axiomatisation est l'axiomatisation de la théorie des arbres finis ou infinis de M. Maher [33], construite sur l'ensemble F^* et augmentée du symbole de relation unaire $feuille$. Cependant, cette axiomatisation force tout modèle de T^* à contenir au moins un arbre réduit à une feuille. Cette dernière restriction provient du fait que cette théorie est une extension en arbre de la théorie vide dont chaque modèle a au moins un individu i (voir la définition de modèle, chapitre 1). D'après notre construction générale, l'extension en arbres ou construction d'arbres sur tout modèle M de la théorie vide T contient donc au moins cet individu i, qui du fait que $i \in \mathcal{M}$, satisfait $feuille\, i$ dans M^*, et donc satisfait $feuille\, i$ dans T^*.

Extension en arbres ${T_{ord}}^*$ de l'ordre dense sans extrêmes T_{ord}

Soient F un ensemble de symboles de fonction vide et R un ensemble de symboles de relation contenant uniquement le symbole de relation $<$ d'arité 2. Si t_1 et t_2 sont des termes, alors on écrit $t_1 < t_2$ pour $<(t_1, t_2)$. Soit T_{ord} la théorie de l'ordre strict, total, dense et sans extrêmes, de signature $S = F \cup R$ et dont les axiomes sont l'ensemble des propositions suivantes

1 $\forall x\, \neg x < x$,
2 $\forall x \forall y \forall z\, (x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z$,
3 $\forall x \forall y\, x < y \vee x = y \vee y < x$,
4 $\forall x \forall y\, x < y \rightarrow (\exists z\, x < z \wedge z < y)$,
5 $\forall x\, \exists y\, x < y$,
6 $\forall x\, \exists y\, y < x$.

Soient maintenant F^* un ensemble infini de symboles de fonction tous d'arité non nulle et $R^* = \{<, p\}$ un ensemble de symboles de relation contenant le symbole $<$ ainsi qu'un symbole de relation unaire p. Soit alors S^* la signature $F^* \cup R^*$. En utilisant les transformations de la section 4.1.1, l'axiomatisation de l'extension en arbre de la théorie T_{ord} de l'ordre total, strict, dense et sans extrêmes, est la S^*-théorie ${T_{ord}}^*$ dont les axiomes sont l'ensemble infini de propositions de l'une des formes suivantes

1 $\forall\bar{x}\forall\bar{y}\ \neg pf\bar{x} \wedge \neg pf\bar{y} \wedge f\bar{x} = f\bar{y} \rightarrow \bigwedge_i x_i = y_i$
2 $\forall\bar{x}\forall\bar{y}\ f\bar{x} = g\bar{y} \rightarrow pf\bar{x} \wedge pg\bar{y}$
3 $\forall\bar{x}\forall\bar{y}\ (\bigwedge_i px_i) \wedge (\bigwedge_j \neg py_j) \rightarrow \exists!\bar{z} \bigwedge_k(\neg pz_i \wedge z_k = t_k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}))$
4 $\forall x\forall y\, x < y \rightarrow (px \wedge py)$,
5 $\forall\bar{x}\, \neg pf\bar{x}$,
6 $\exists x\, px$,
7 $\forall x\, px \rightarrow \neg x < x$,
8 $\forall x\forall y\forall z\, px \wedge py \wedge pz \rightarrow ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$,
9 $\forall x\forall y\, (px \wedge py) \rightarrow (x < y \vee x = y \vee y < x)$,
10 $\forall x\forall y\, (px \wedge py) \rightarrow (x < y \rightarrow (\exists z\, pz \wedge x < z \wedge z < y))$,
11 $\forall x\, px\ \rightarrow (\exists y\, py \wedge x < y)$,
12 $\forall x\, px\ \rightarrow (\exists y\, py \wedge y < x)$,

où f et g sont des symboles de fonction distincts pris dans F^*, x, y, z des variables, $\bar{x}$ un vecteur de variables x_i, $\bar{y}$ un vecteur de variables y_i, $\bar{z}$ un vecteur de variables z_i toutes distinctes et $t_i(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un terme qui commence par un élément de F^* suivi de variables prises dans $\bar{x}$, $\bar{y}$ ou $\bar{z}$.

Du fait de l'axiome 5, et en remplaçant le symbole de relation p par le symbole *num*, cette axiomatisation se simplifie en

1 $\forall\bar{x}\forall\bar{y}\ f\bar{x} = f\bar{y} \rightarrow \bigwedge_i x_i = y_i$
2 $\forall\bar{x}\forall\bar{y}\ \neg(f\bar{x} = g\bar{y})$
3 $\forall\bar{x}\ \exists!\bar{z} \bigwedge_k z_k = t_k(\bar{x}, \bar{z})$
4 $\forall x\forall y\, x < y \rightarrow (num\, x \wedge num\, y)$,
5 $\forall\bar{x}\, \neg num\, f\bar{x}$,
6 $\exists x\, num\, x$,
7 $\forall x\, num\, x \rightarrow \neg x < x$,
8 $\forall x\forall y\forall z\, num\, x \wedge num\, y \wedge num\, z \rightarrow ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$,
9 $\forall x\forall y\, (num\, x \wedge num\, y) \rightarrow (x < y \vee x = y \vee y < x)$,
10 $\forall x\forall y\, (num\, x \wedge num\, y) \rightarrow (x < y \rightarrow (\exists z\, num\, z \wedge x < z \wedge z < y))$,
11 $\forall x\, num\, x\ \rightarrow (\exists y\, num\, y \wedge x < y)$,
12 $\forall x\, num\, x\ \rightarrow (\exists y\, num\, y \wedge y < x)$,

où f et g sont des symboles de fonction distincts pris dans F^*, x, y, z des variables, $\bar{x}$ un vecteur de variables x_i, $\bar{y}$ un vecteur de variables y_i, $\bar{z}$ un vecteur de variables z_i toutes distinctes et $t_i(\bar{z}, \bar{x})$ un terme qui commence par un élément de F^* suivi de variables prises dans $\bar{x}$ ou $\bar{z}$.

Cette axiomatisation est exactement la même que celle de la construction d'arbres sur un ensemble ordonné $\mathcal{T}_{ord}$ présentée dans le chapitre 3 des théories zéro-infni-décomposables. Bien entendu, la méthode donnée dans ce chapitre pour générer les axiomes d'une extension T^* de T est généraliste, il n'est pas écarté que l'on ait à simplifier d'avantage l'axiomatisation obtenue dans des cas particuliers, comme il a été fait pour l'extension de la théorie vide et l'extension de T_{ord}.

4.2 Complétude de T^*

Fixons-nous maintenant pour toute cette section une signature S contenant un ensemble F de symboles de fonction et un ensemble R de symboles de relation, ainsi qu'une signature S^* contenant

- un ensemble infini $F^* = F \cup F_A$ où F_A est un ensemble infini de symboles de fonction, tous d'arité non nulle, et disjoint de F,
- un ensemble $R^* = R \cup \{p\}$ de symboles de relation, contenant R ainsi qu'un symbole de

relation p d'arité 1.
Fixons-nous également une S-théorie T ainsi que son extension en arbres T^*.

Supposons que les variables de V soient ordonnées par un ordre total, strict, dense et sans extrêmes, noté $\succ$.

4.2.1 Théorie flexible

Définition 4.2.1.1 *On appelle* représentant *d'une S-équation α la plus grande variable x dans α, suivant l'ordre $\succ$, telle que $T \models \exists! x \alpha$.*

Exemple 4.2.1.2 *Soit x, y et z des variables telles que $x \succ y \succ z$. Reprenons l'exemple de la théorie Ra des rationnels additifs définie dans le chapitre 2. La variable x est représentant de l'équation $2.x + 3.y = 1 + 2.z$ car x est la plus grande variable et $Ra \models \exists! x\, 2.x + 3.y = 1 + 2.z$.*

Définition 4.2.1.3 *Une conjonction de S-formules atomiques α est dite* formatée *dans T si*
- *α ne contient pas de sous-formules de la forme $f_1 = f_2$ ou $rf_1...f_n$ ou $y = x$, avec f_i des constantes de F, $r \in R$ et $x \succ y$,*
- *chaque S-équation de α a un représentant distinct qui n'a pas d'occurrence dans d'autres S-équations ou S-relations de α,*
- *si α' est la conjonction des S-équations de α, alors pour tout $x \in var(\alpha')$ on a $T \models \exists ? x\, \alpha'$.*

Nous allons maintenant introduire un famille de théories T_i dont les propriétés nous seront très utiles pour montrer la zéro-infini-décomposabilité de leur extension en arbres, c'est-à-dire, T_i^*.

Définition 4.2.1.4 *La théorie T est dite* flexible *si pour toute conjonction α de S-équations et pour toute conjonction β de S-relations*

1. *$\alpha \wedge \beta$ est équivalente dans T à une conjonction formatée de formules atomiques svls,*
2. *la S-formule $\neg\beta$ est équivalente dans T à une disjonction svls de S-équations et de S-relations,*
3. *pour tout $x \in V$*
   - *la S-formule $\exists x\, \beta$ est équivalente dans T à faux, ou à une conjonction svls de S-relations,*
   - *pour tout $x \in V$, on a $T \models \exists^{\{faux\}}_{o\ \infty} x\, \beta$.*

Annonçons maintenant notre résultat principal

Théorème 4.2.1.5 *Si T est flexible alors T^* est une théorie complète.*

Pour montrer ce théorème, nous allons d'abord introduire un ensemble de formules structurées, beaucoup plus évoluées que les formules à plat et qu'on appelle *briques*. Nous allons alors montrer à l'aide de ces briques que si T est flexible alors T^* est zéro-infini-décomposable et par conséquent complète.

4.2.2 Briques et briques résolues dans T^*

Définition 4.2.2.1 *Une* brique *est une conjonction α de S^*-formules de la forme*
- *vrai, faux, px, $\neg px$,*
- *$x = y$, $x = fx_1 \ldots x_n$, avec $f \in F^*$,*
- *$t_1 = t_2 \wedge \bigwedge_{i=1}^n px_i$, où t_1 et t_2 sont des S-termes et $var(t_1 = t_2) = \{x_1, \ldots, x_n\}$,*
- *$rt_1 \ldots t_n$, avec $r \in R$ et les t_i des S-termes ,*

et telle que α contienne px ou $\neg px$ pour toute variable $x \in$ var(α). Une brique relationnelle *est une brique qui ne contient pas de S^*-équations. Une* brique équationnelle *est une brique qui ne contient pas de S-relations et où chaque variable a au moins une occurrence dans une S^*-équation.*

Exemple 4.2.2.2 *Considérons la S^*-théorie $T_{ord}{}^*$. La S^*-formule suivante est une brique*

$$x = fxy \wedge z = gxy \wedge \neg px \wedge py \wedge pz.$$

Par contre la S^*-formule

$$fxy = gyx \wedge px \wedge py,$$

n'est pas une brique car fxy et gyx ne sont pas des S-termes mais des S^*-termes. De même pour la S^*-formule $fxy < gyx \wedge px \wedge py$, qui n'est pas une brique car fxy et gyx sont des S^*-termes et non des S-termes. La brique $x = fxy \wedge y = z \wedge \neg px \wedge py \wedge pz$ est une brique équationnelle, par contre la brique

$$x = fxy \wedge y = z \wedge \neg px \wedge py \wedge pz \wedge pw,$$

n'est pas équationnelle car la variable w n'apparaît dans aucune équation de cette brique.

Définition 4.2.2.3 *Soient α une brique et $\bar{x}$ un vecteur de variables. Une variable u est dite* accessible *dans $\exists\bar{x}\alpha$ si u est une variable libre dans $\exists\bar{x}\alpha$, ou α a une sous-formule de la forme $y = t(u) \wedge \neg p\,y$ avec $t(u)$ un S^*-terme contenant u et y est une variable accessible. Dans le dernier cas, l'équation $y = t(u)$ est dite accessible dans $\exists\bar{x}\alpha$.*

Exemple 4.2.2.4 *Considérons la S^*-théorie $T_{ord}{}^*$. Dans la formule*

$$\exists yz\, x = fxy \wedge y = z \wedge \neg px \wedge py \wedge pz,$$

les variables x et y ainsi que l'équation $x = fxy$ sont accessibles. La variable z ainsi que l'équation $y = x$ ne sont pas accessibles car la formule précédente ne contient pas de sous-formule de la forme $\neg py$.

De l'axiomatisation de T^*, définie dans la section 4.1.1, et plus exactement des axiomes 1 et 2, on a la propriété suivante

Propriété 4.2.2.5 *Soit α une brique. Si toutes les variables de $\bar{x}$ sont accessibles dans $\exists\bar{x}\alpha$, alors $T^* \models \exists?\bar{x}\alpha$.*

Définition 4.2.2.6 Une brique α est dite *bien typée* si α ne contient pas de sous-formules de l'une des formes suivantes

- $p\,x \wedge \neg p\,x$,
- $x = h\bar{y} \wedge p\,x$, avec $h \in F^* - F$,
- $x = f_0 \wedge \neg p\,x$, avec f_0 une constante de F,
- $x_0 = fx_1 ... x_n \wedge \neg p\,x_0 \wedge \bigwedge_{i=1}^n p\,x_i$, avec $f \in F$,
- $x_0 = fx_1 ... x_n \wedge p\,x_0 \wedge \neg p\,x_i$, avec $f \in F^*$
- $x_0 = x_1 \wedge p\,x_0 \wedge \neg p\,x_1$,
- $x_0 = x_1 \wedge \neg p\,x_0 \wedge p\,x_1$,
- $rt_1 ... t_n \wedge \neg p\,x_i$ avec $r \in R$ et $x_i \in var(rt_1 ... t_n)$.

Définition 4.2.2.7 *Soit α une brique bien typée. Une S^*-équation de α de la forme $t_1 = t_2$ est dite* non-arborescente *dans α, si pour tout $x \in var(t_1 = t_2)$, px est une sous formule de α. Elle est dite* arborescente *dans α s'il existe $x \in var(t_1 = t_2)$ tel que $\neg px$ soit une sous-formule de α.*

Dans une brique α bien typée, toute équation est soit arborescente, soit non-arborescente. Cette propriété provient entre autres du fait que dans une brique bien typée il n'existe pas de sous-formules de la forme $\neg px \wedge px$. Notons également que toutes les équations non-arborescentes de α sont de la forme $x = y$ ou $x = f\bar{y}$ avec $f \in F^*$. On va alors définir une notion plus raffinée de représentant dans ce genre d'équations.

Définition 4.2.2.8 *Soit α une brique bien typé et $x = t$, avec t un terme, une S^*-équation arborescente de α. La variable x est appelée α-représentant de la S^*-équation $x = t$. Soit maintenant $t_1 = t_2$, avec t_1 et t_2 deux S-termes, une S^*-équation non-arborescente de α. On appelle α-représentant de la S^*-équation $t_1 = t_2$, la plus grande variable x_k dans $var(t_1 = t_2)$ suivant l'ordre $\succ$ telle que $T \models \exists! x_k\, t_1 = t_2$. Notons que cette unicité se fait en raisonnant sur T et non sur T^* ; seule une implication d'unicité est vraie dans T^* comme le montrera la propriété 4.2.2.13.*

Exemple 4.2.2.9 *Considérons les théories T_{ord} et $T_{ord}{}^*$. Soient x, y, z des variables avec $x \succ y \succ z$. Soit α la brique*

$$x = fxy \wedge z = y \wedge \neg px \wedge py \wedge pz.$$

La variable x est α-représentant de la S^*-équation $x = fxy$. La variable y est α-représentant de la S^*-équation $z = y$ car $T_{ord} \models \exists! y\, z = y$ et $y \succ z$.

Définition 4.2.2.10 *Une brique α est dite* $(\succ)$-résolue *dans T^* si*

1. *α est une brique bien typée qui ne contient pas de sous-formules de la forme $faux \wedge \beta$ avec β une formule différente de la formule vrai,*
2. *chaque S^*-équation de α a un α-représentant distinct qui n'apparaît pas dans les S-relations de α,*
3. *toute conjonction de S-équations et S-relations est formatée dans T.*

Notons que du dernier point de cette définition et d'après la définition de formules formatées dans T, on déduit que si $x = y$ est une sous-formule de la brique $(\succ)$-résolue α alors $x \succ y$ et ce indépendamment du typage de x et de y dans α. Bien entendu, toute S^*-équation de la forme $x = y$ est également une S-équation.

Exemple 4.2.2.11 *Considérons la théorie $T_{ord}{}^*$. Soit x, y, z des variables avec $x \succ y \succ w \succ z$. La brique*

$$x = fxy \wedge y = w \wedge w = z \neg px \wedge py \wedge pz \wedge pw,$$

n'est pas $(\succ)$-résolue car w est le représentant de la S-équation $w = z$ et apparaît également dans la S-équation $y = w$. Les briques faux, vrai, et

$$x = fxy \wedge y = z \wedge w = z \wedge \neg px \wedge py \wedge pz \wedge pw,$$

sont $(\succ)$-résolues.

Propriété 4.2.2.12 *Si T est flexible alors toute brique est équivalente dans T^* à une brique svls $(\succ)$-résolue.*

Preuve. Introduisons les règles de réécriture suivantes qui transforment une brique en une brique svls ($\succ$)-résolue dans T^* pour toute théorie T flexible. Appliquer la règle $p_1 \Longrightarrow p_2$ à la brique p signifie remplacer dans p, une sous-formule p_1 par la formule p_2, en considérant le connecteur $\wedge$ associatif et commutatif.

$$\begin{array}{lll}
(1) & p\,x \wedge \neg p\,x & \Longrightarrow \ \mathit{faux} \\
(2) & x = h\bar{y} \wedge p\,x & \Longrightarrow \ \mathit{faux} \\
(3) & x = f_0 \wedge \neg p\,x & \Longrightarrow \ \mathit{faux} \\
(4) & x_0 = f x_1 ... x_n \wedge \neg p\,x_0 \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} p\,x_i & \Longrightarrow \ \mathit{faux} \\
(5) & x_0 = g x_1 ... x_n \wedge p\,x_0 \wedge \neg p\,x_i & \Longrightarrow \ \mathit{faux} \\
(6) & x_0 = x_1 \wedge p\,x_0 \wedge \neg p\,x_1 & \Longrightarrow \ \mathit{faux} \\
(7) & x_0 = x_1 \wedge \neg p\,x_0 \wedge p\,x_1 & \Longrightarrow \ \mathit{faux} \\
(8) & r t_1 ... t_n \wedge \neg p\,z & \Longrightarrow \ \mathit{faux} \\
(9) & \mathit{faux} \wedge \alpha & \Longrightarrow \ \mathit{faux}, \\
(10) & x = f_1 y_1 ... y_m \wedge x = f_2 z_1 ... z_n \wedge \neg px & \Longrightarrow \ \mathit{faux}, \\
(11) & x = x & \Longrightarrow \ \mathit{vrai} \\
(12) & x = g y_1 ... y_n \wedge x = g z_1 ... z_n \wedge \neg px & \Longrightarrow \ x = g y_1 ... y_n \wedge \bigwedge_{i \in 1..n} y_i = z_i \wedge \neg px, \\
(13) & x = y \wedge x = g z_1 ... z_n \wedge \neg px & \Longrightarrow \ x = y \wedge y = g z_1 ... z_n \wedge \neg px, \\
(14) & x = y \wedge x = z \wedge \neg px & \Longrightarrow \ x = y \wedge z = y \wedge \neg px \\
(15) & y = x \wedge \neg px & \Longrightarrow \ x = y \wedge \neg px \\
(16) & \alpha \wedge \bigwedge_{i \in I} px_i & \Longrightarrow \ \alpha' \wedge \bigwedge_{i \in I} px_i
\end{array}$$

avec $h \in F^* - F$, f_0 une constante de F, $f \in F$, $g \in F^*$ et f_1 et f_2 deux éléments distincts de F^*. Dans la règle (8), $r \in R$ et $z \in var(rt_1...t_n)$. Les règles (13), (14) et (15) sont appliquées uniquement si $x \succ y$. Dans la règle (16), α est une conjonction non-formatée dans T de S-formules atomiques, $var(\alpha) = \{x_1..., x_n\}$, $I = \{1, ..., n\}$ un ensemble fini éventuellement vide et α' est une conjonction formatée dans T, suivant l'ordre $\succ$, de S-formules atomiques et équivalente à α dans T.[23]. Montrons maintenant que toute application répétée des règles précédentes sur une brique α termine, maintient l'équivalence dans T^* et produit bien une brique β svls ($\succ$)-résolue.

Preuve première partie : toute application répétée des règles sur une brique termine. Du fait que les variables qui figurent dans nos formules soient ordonnées par la relation d'ordre $\succ$, on peut les numéroter par des entiers positifs de telle façon que $x \succ y \leftrightarrow no(x) > no(y)$, où $no(x)$ est le numéro de la variable x. Considérons le 5-uplet $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ où les n_i sont les entiers non négatifs suivants

- n_1 est le nombre de sous-formules de la forme $x = f y_1 ... y_n$, avec $f \in F^*$,
- n_2 est une fonction qui retourne 1, si la formule contient une conjonction non-formatée dans T de S-formules atomiques, et retourne 0 sinon,
- n_3 est le nombre d'occurrences de formules atomiques,
- n_4 est la somme des $no(x)$ pour toute occurrence d'une variable x,
- n_5 est le nombre de sous-formules de la forme $y = x$ avec $x \succ y$.

pour chaque règle, il existe un indice i tel que l'application de cette règle diminue ou ne change pas la valeur des n_j avec $1 \leq j < i$, et diminue la valeur de n_i. L'indice i est égal à : 3 pour les règles (1)...(10), 4 pour la règle (11), 1 pour la règle (12), 4 pour les règles (13) et (14), 5 pour la règle (15) et 2 pour la règle (16). A chaque séquence de formules obtenue par application finie de nos règles, on peut associer une suite $(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ qui est strictement décroissante dans l'ordre lexicographique. Du fait que ces n_i's soient des entiers positifs, ils ne peuvent pas être négatifs, donc cette suite est finie et l'application de nos règles se termine.

[23] La formule α' existe toujours du fait que T soit flexible.

Preuve, deuxième partie : Les règles conservent l'équivalence dans T^*. La règle (1) est évidente dans T^*. La règle (2) provient de l'axiome 6 de T^*. Les règles (3) et (4) proviennent de l'axiome 5 de T^*. La règle (5) provient des axiomes 5 et 6. Les règles (6) et (7) proviennent des propriétés de l'égalité. La règle (8) provient de l'axiome 4 de T^*. La règle (9) est évidente. La règle (10) provient de l'axiome 2 de T^*. La règle (11) est évidente dans T^*. La règle (12) provient de l'axiome 1 de T^*. Les règles (13), (14) et (15) sont évidentes dans T^* et proviennent des propriétés de l'égalité. Enfin, la règle (16) provient du fait que T soit flexible et des axiomes 4,5 et 8 de T^* qui permettent de passer de propriétés sur T à des propriétés sur T^* modulo quelques contraintes de typage supplémentaires.
Preuve troisième partie : Toute application finie des règles précédentes sur une brique produit une brique ($\succ$)-résolue équivalente dans T^*. Supposons alors que la formule obtenue ne soit pas une brique ($\succ$)-résolue et qu'aucune règle ne puisse s'appliquer sur α. Donc, au moins une des trois conditions de la définition 4.2.2.10 n'est pas satisfaite et par conséquent, suivant que les conditions 1, 2, 3, ne soient pas satisfaites, une au moins des règles (1),..., (9) ou (10),(12),(13),(14), (16) ou (11),(15), (16) s'applique, ce qui contredit nos suppositions. □

Propriété 4.2.2.13 *Soient α une brique équationnelle ($\succ$)-résolue, différente de la formule faux et α^* la conjonction des sous-formules de α de la forme py ou $\neg py$ où y est une variable de α qui n'est pas α-représentant dans les S^*-équations de α. Soit $\bar{x}$ l'ensemble des α-représentants des S^*-équations de α. On a $T^* \models \alpha^* \rightarrow \exists! \bar{x}\alpha$.*

Cette propriété provient de l'axiome 3 de T^* et du fait que la brique α soit ($\succ$)-résolue.

Exemple 4.2.2.14 *Reprenons l'exemple de l'extension en arbre $\mathcal{T}_{ord}$. On a*

$$T^*_{ad} \models pw \wedge pz \rightarrow (\exists! xy\, x = fxw \wedge y = z \wedge \neg px \wedge py \wedge pz \wedge pw).$$

Par contre on n'a pas

$$T^*_{ad} \models \exists! xy\, x = fxw \wedge y = z \wedge \neg px \wedge py \wedge pz \wedge pw$$

car si on instancie z par une valeur arborescente par exemple $f1$ (f un symbole unaire élément de $F^* - \{+, -, 0, 1\}$) alors y doit être arborescent ce qui contredit le py.

4.2.3 T^* est zéro-infini-décomposable

Pour montrer le théorème 4.2.1.5, il suffit de montrer le théorème suivant en utilisant les propriétés des briques ($\succ$)-résolues dans T^*.

Théorème 4.2.3.1 *Si T est flexible alors T^* est zéro-infini-décomposable.*

Preuve. Soit T une théorie flexible. Montrons que T^* satisfait aux cinq conditions de la définition 3.2.1.1. Notons F_0 l'ensemble des constantes de F. Les ensembles $\Psi(u)$, A, A' et A'' sont choisis de la manière suivante

Choix des ensembles $\Psi(u)$, A, A' et A''

- $\Psi(u)$ est l'ensemble des S^*-formules de la forme $\exists \bar{y}\, u = f\bar{y} \wedge \neg p\, u$, avec f un symbole de fonction pris dans $F^* - F_0$.
- A est l'ensemble des briques.
- A' est l'ensemble des S^*-formules de la forme $\exists \bar{x}'\alpha'$, où

  - α' est une brique équationnelle $(\succ)$-résolue, différente de la formule *faux*, et telle que l'ordre $\succ$ soit tel que toutes les variables de $\bar{x}'$ soient supérieures aux variables libres de $\exists\bar{x}'\alpha'$,
  - toutes les variables de $\bar{x}'$ et toutes les S^*-équations arborescentes de α' sont accessibles dans $\exists\bar{x}'\alpha'$,
  - toutes les variables des S^*-équations non-arborescentes de α' sont accessibles dans $\exists\bar{x}'\alpha'$,
- A'' est l'ensemble des briques relationnelles $(\succ)$-résolues.

Notons que l'ensemble A est fermé pour la conjonction et que A'' est un sous-ensemble de A.

T^* satisfait à la première condition de la définition 3.2.1.1

Montrons que toute formule de la forme $\exists\overline{x}\,\alpha \wedge \psi$, avec $\alpha \in A$ et ψ une formule quelconque est équivalente dans T^* à une S^*-formule svls de la forme

$$\exists\overline{x}'\,\alpha' \wedge (\exists\overline{x}''\,\alpha'' \wedge (\exists\overline{x}'''\,\alpha''' \wedge \psi))), \tag{4.1}$$

avec $\exists\overline{x}'\alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$, $\alpha''' \in A$ et $T^* \models \forall\bar{x}''\,\alpha'' \rightarrow \exists!\bar{x}'''\alpha'''$.

Soit $\succ$ un ordre tel que toutes les variables de $\bar{x}$ soient supérieures aux variables libres de $\exists\bar{x}\alpha$. Soit β la brique $(\succ)$-résolue de α, (β existe d'après la propriété 4.2.2.12). Soit X l'ensemble des variables du vecteur $\bar{x}$. Soit Y_{acc} l'ensemble des variables accessibles dans $\exists\bar{x}\beta$ et Soit Y_{nacc} l'ensemble des variables non accessibles dans $\exists\bar{x}\beta$. Renommons les variables de $Y_{nacc} \cap X$ qui ont au moins une occurrence dans une sous-formule non-arborescente de β par des variables supérieures dans l'ordre $\succ$ aux autres variables de β. Notons que ces variables sont quantifiées et donc le renommage est possible. Soit β^* la brique $(\succ)$-résolue de β. Soit *Repr* l'ensemble des β^*-représentants des S^*-équations de β^*. Si $faux$ est une sous-formule de β^* alors $\bar{x}' = \bar{x}'' = \bar{x}''' = \varepsilon$, $\alpha' = vrai$, $\alpha'' = faux$ et $\alpha''' = vrai$. Sinon

- $\bar{x}'$ contient les variables de $X \cap Y_{acc}$,
- $\bar{x}''$ contient les variables de $(X - Y_{acc}) - Repr$.
- $\bar{x}'''$ contient les variables de $(X - Y_{acc}) \cap Repr$.
- α' est de la forme $\alpha'_1 \wedge \alpha'_2$ où α'_1 est la conjonction de (1) toutes les équations arborescentes de β^* qui sont accessibles dans $\exists\bar{x}\beta^*$, (2) toutes les équations non-arborescentes de β^* dont le β^*-représentant n'est pas élément de $Y_{nacc} \cap X$. La formule α'_2 est la conjonction de toutes les sous-formules de β^* de la forme $p\,x$ ou $\neg p\,x$ avec x ayant au moins une occurrence dans α'_1.
- α'' est de la forme $\alpha''_1 \wedge \alpha''_2$ où α''_1 est la conjonction de toutes les sous-formules de β^* de la forme $p\,x$ ou $\neg p\,x$ avec $x \notin \bar{x}'''$. La formule α''_2 est la conjonction de toutes les sous-formules de β^* de la forme $rt_1...t_n$ avec $r \in R$ et t_i des S-termes.
- α''' est de la forme $\alpha'''_1 \wedge \alpha'''_2$ où α'''_1 est la conjonction de (1) toutes les S^*-équations arborescentes de β^* qui ne sont pas accessibles dans $\exists\bar{x}\beta^*$, (2) toutes les équations non arborescentes de β^* dont le β^*-représentant est un élément de $Y_{nacc} \cap X$. La formule α'''_2 est la conjonction de toutes les sous-formules de β^* de la forme $p\,x$ ou $\neg p\,x$ avec x ayant au moins une occurrence dans α'''_1.

D'après notre construction, il est clair que $\exists\bar{x}'\alpha' \in A'$, $\alpha'' \in A''$ et $\alpha''' \in A$. De plus, d'après l'axiome 3 de T^* et la propriété 4.2.2.13, on a $\mathcal{T}_{ord} \models \forall\bar{x}''\alpha'' \rightarrow \exists!\bar{x}'''\alpha'''$. Montrons maintenant que (4.1) et $\exists\bar{x}\alpha \wedge \psi$ sont équivalentes dans T^*. Soient X', X'' et X''' les ensembles des variables des vecteurs[24] de $\bar{x}'$, $\bar{x}''$ et $\bar{x}'''$. Si β^* est la formule *faux* alors l'équivalence de la décomposition est évidente. Sinon, β^* est une brique $(\succ)$-résolue qui ne contient pas la sous-formule *faux*. Donc, d'après notre construction nous avons $X = X' \cup X'' \cup X'''$, $X' \cap X'' = \emptyset$, $X' \cap X''' = \emptyset$, $X'' \cap X''' = \emptyset$, pour tout $x''_i \in X''$ on a $x''_i \notin var(\alpha')$ et pour tout $x'''_i \in X'''$ on a $x'''_i \notin var(\alpha' \wedge \alpha'')$. Ces propriétés

[24] Bien entendu, si $\bar{x} = \varepsilon$ alors $X = \emptyset$

proviennent de la définition de brique ($\succ$)-résolue et de l'ordre $\succ$ qui a été choisi tel que les variables quantifiées non-accessibles soient supérieures aux variables quantifiées accessibles qui elles mêmes sont supérieures aux variables libres dans $\exists\bar{x}\beta^*$. D'autre part, chaque S^*-équation et chaque S^*-relation de β^* apparaît dans $\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha'''$ et chaque S^*-équation et chaque S^*-relation de $\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha'''$ apparaît dans β^* et donc $T^* \models \beta^* \leftrightarrow (\alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha''')$. Nous avons montré que les quantifications sont cohérentes et que l'équivalence $T^* \models \beta^* \leftrightarrow \alpha' \wedge \alpha'' \wedge \alpha'''$ est satisfaite. D'après la propriété 4.2.2.12 on a $T^* \models \alpha \leftrightarrow \beta^*$ et donc la décomposition maintient l'équivalence dans T^*.

T^* satisfait à la deuxième condition de la définition 3.2.1.1

Montrons que T^* satisfait à la deuxième condition de la définition 3.2.1.1, c'est-à-dire, si $\exists\bar{x}'\alpha' \in A'$ alors $T^* \models \exists?\bar{x}'\alpha'$. Du fait que $\exists\bar{x}'\alpha' \in A'$ et d'après le choix de l'ensemble A', les variables de $\bar{x}'$ sont accessibles dans $\exists\bar{x}'\alpha'$. Donc, en utilisant la propriété 4.2.2.5 on obtient $T^* \models \exists?\bar{x}'\alpha'$.

Montrons maintenant que si y est une variable libre de $\exists\bar{x}'\alpha'$ alors $T^* \models \exists?y\bar{x}'\,\alpha'$, ou il existe $\psi(u) \in \Psi(u)$ tel que $T^* \models \forall y\,(\exists\bar{x}'\,\alpha') \rightarrow \psi(y)$. Soit y une variable libre de $\exists\bar{x}'\alpha'$. Du fait que α' soit une brique équationnelle ($\succ$)-résolue différente de *faux*, alors trois cas sont à étudier

Soit, y apparaît dans une sous-formule de α' de la forme $y = t(\bar{x}', \bar{z}', y) \wedge \neg py$, où $\bar{z}'$ est l'ensemble des variables libres de $\exists\bar{x}'\alpha'$ qui sont différentes de y, $t(\bar{x}', \bar{z}', y)$ est un terme qui commence par un élément de $F^* - F_0$, suivi par des variables prises dans $\bar{x}'$ ou $\bar{z}'$ ou $\{y\}$. Dans ce cas, la formule $\exists\bar{x}'\alpha'$ implique dans T^* la formule

$$\exists\bar{x}'\, y = t(\bar{x}', \bar{z}', y) \wedge \neg p\, y,$$

qui implique dans T^* la formule

$$\exists\bar{x}'\bar{z}'w\, y = t(\bar{x}', \bar{z}', w) \wedge \neg p\, y, \tag{4.2}$$

où $y = t(\bar{x}', \bar{z}', w)$ est la formule $y = t(\bar{x}', \bar{z}', y)$ dans laquelle nous avons remplacé toute occurrence libre de y dans le terme $t(\bar{x}', \bar{z}', y)$ par la variable w. D'après le choix de l'ensemble $\Psi(u)$ défini à la section 4.2.3, la formule (4.2) appartient à $\Psi(y)$.

Soit, y apparaît dans une sous-formule de α' de la forme $y = z \wedge \neg py$. Dans ce cas, du fait que y soit α'-représentant de l'équation $y = z$, alors on a $y \succ z$ (car α' est ($\succ$)-résolue), et par conséquent z est une variable libre dans $\exists\bar{x}'\alpha'$ car l'ordre $\succ$ est tel que toutes les variables de $\bar{x}'$ soient supérieures aux variables libres de $\exists\bar{x}'\alpha'$ (donc supérieures à y). D'autre part, du fait que α' soit une brique ($\succ$)-résolue, y n'est pas α'-représentant d'une autre équation de α' (car tous les α'-représentants sont distincts), donc la variable y ne peut pas apparaître dans un autre membre gauche d'une S^*-équation de α' (car $\neg py$ est une sous formule de la brique bien typée α'). Par conséquent, du fait que les variables de $\bar{x}$ soient accessibles dans $\exists\bar{x}'\alpha'$ (voir choix de l'ensemble A' section 4.2.3) alors toutes les variables de $\bar{x}'$ restent accessibles dans $\exists\bar{x}'y\,\alpha'$. De plus, pour chaque valeur de la variable libre z, il existe au plus une valeur pour y. Par conséquent, en utilisant la propriété 4.2.2.5, on obtient bien $T^* \models \exists?\bar{x}'y\,\alpha'$.

Soit, y apparaît uniquement dans des sous-formules de la forme

$$x_0 = t(y) \ \ ou \ \ t_1 = t_2, \tag{4.3}$$

avec $x_0 = t(y)$ une S^*-équation arborescente de α', $t(y)$ un S^*-terme qui commence par un élément de $f \in F^*$ et contient au moins une occurrence de la variable y, et $t_1 = t_2$ une S^*-équation non arborescente de α' contenant au moins une occurrence de y. Rappelons que d'après le choix de l'ensemble A' (section 4.2.3), $\bar{x}'$ contient les variables accessibles quantifiées dans $\exists\bar{x}'\,\alpha'$ et toutes les équations arborescentes de α' sont accessibles dans $\exists\bar{x}'\alpha'$. (1) Si y apparaît dans une équation arborescente de α', alors du fait que y n'apparaisse pas dans un autre membre gauche d'une équation arborescente de α', alors les variables de $\bar{x}'y$ restent accessibles dans $\exists\bar{x}'y\,\alpha'$ et donc en utilisant la propriété 4.2.2.5 on obtient $T^* \models \exists?\bar{x}'y\,\alpha'$. (2) Si y apparaît uniquement dans des équations non-arborescentes de α', alors d'après le choix de l'ensemble A' les variables de $\bar{x}'$ sont accessibles dans $\exists\bar{x}'\,\alpha'$. Du fait que y n'apparaisse pas dans une équation arborescente de α', alors les variables de $\bar{x}'$ restent accessibles dans $\exists\bar{x}'y\,\alpha'$. De plus, du fait que α' soit $(\succ)$-résolue alors ses S-équations sont formatées et donc $T^* \models \exists?y\,\alpha$. En utilisant la propriété 4.2.2.5 on obtient alors $T^* \models \exists?\bar{x}'y\,\alpha'$.

Dans tous les cas, T^* satisfait à la deuxième condition de la définition 2.2.1.1.

T^* satisfait à la troisième condition de la définition 3.2.1.1

T^* satisfait au premier point de la troisième condition de la définition 3.2.1.1

Montrons que si $\alpha'' \in A''$, alors la formule $\neg\alpha''$ est équivalente dans T^* à une disjonction d'éléments de A, c'est-à-dire, à une disjonction de briques. Soit α'' une S^*-formule élément de A''.

D'après le choix de l'ensemble A'' défini à la section 4.2.3, soit α'' est la formule *faux* et donc $\neg\alpha''$ est la formule *vrai* qui bien entendu est un élément de A'', soit α'' est une brique relationnelle $(\succ)$-résolue de la forme

$$\beta \wedge (\bigwedge_{x\in X} px) \wedge (\bigwedge_{y\in Y} \neg py),$$

avec β une conjonction de S-relations de la forme $rt_1...t_n$ avec $r \in R$ et $var(\beta) \subseteq X$. D'après le deuxième point de la définition de théorie flexible, nous avons $T \models \neg\beta \leftrightarrow \beta'$ où β' est une disjonction de S-relations et de S-équations. Donc, en utilisant l'axiomatisation de T^* (plus exactement, les axiomes 4,5 et 8), la S^*-formule $\neg\alpha''$ est équivalente dans T^* à une S^*-formule svls de la forme

$$(\bigvee_{k\in K} (\beta'_k \wedge p_k)) \vee (\bigvee_{x\in X} \neg px) \vee (\bigvee_{y\in Y} py),$$

où chaque β'_k est, soit une S-équation, soit une S-relation, p_k est une conjonction de S^*-formules de la forme px pour toute variable $x \in var(\beta'_k)$. Cette formule est bien entendu une disjonction de briques. Donc T^* satisfait au premier point de la troisième condition de la définition 3.2.1.1.

T^* satisfait au deuxième point de la troisième condition de la définition 3.2.1.1

Montrons que si $\alpha'' \in A''$, alors pour toute variable x'', la S^*-formule $\exists x''\alpha''$ est équivalente dans T^* à un élément de A''. Soit α'' une S^*-formule de A'', trois cas sont à étudier

(1) Si x'' n'a pas d'occurrences dans α'', alors la S^*-formule $\exists x''\,\alpha''$ est équivalente dans T^* à α'' qui bien entendu est un élément de A''.

(2) Si la S^*-formule $\exists x''\,\alpha''$ est de la forme $\exists x''\,\alpha''_1 \wedge \neg p\,x''$ avec $\alpha''_1 \in A''$ et x'' n'a pas d'occurrences dans α''_1, alors la S^*-formule $\exists x''\,\alpha''$ est équivalente dans T^* à $\alpha''_1 \wedge (\exists x''\,\neg p\,x'')$, qui d'après l'axiome 3 de T^*, est équivalente dans T^* à α''_1, qui bien entendu est un élément de A''.

(3) Si la S^*-formule $\exists x''\,\alpha''$ est de la forme

$$\exists x''\,\alpha''_1 \wedge \varphi,$$

avec α''_1 une conjonction de S^*-relations avec $x'' \notin var(\alpha''_1)$ et φ une brique relationnelle contenant uniquement des S^*-relations de la forme px'' ou $rt_1...t_n$ avec $r \in R$ et $x'' \in var(rt_1...t_n)$, alors la formule $\exists x''\, \alpha''$ est équivalente dans T^* à

$$\alpha''_1 \wedge \phi \wedge (\exists x''\, \varphi), \tag{4.4}$$

avec ϕ la conjonction des sous-formules de typage de φ de la forme px ou $\neg px$ avec $x \in var(\alpha''_1)$. La formule $\alpha''_1 \wedge \phi$ est donc une brique relationnelle $(\succ)$-résolue. Si φ se réduit à la formule px, alors d'après l'axiome 7 de T^*, la formule (4.4) est équivalente dans T^* à $\alpha''_1 \wedge \phi$, qui est bien un élément de A''. Sinon, φ est de la forme $\varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge px''$ où φ_1 est la conjonction des contraintes de typage de φ qui ne font pas intervenir la variable x'' et φ_2 la conjonction des relations de φ de la forme $rt_1...t_n$ avec $r \in R$ et t_i des S-termes. D'après le dernier point de la définition de théorie flexible, la formule $\exists x''\, \varphi_2$ est équivalente dans T à *faux* ou a une conjonction φ'_2 svls de S-relations. Par conséquent, en utilisant les axiomes 8 et 4 de T^*, la formule $\exists x''\, \varphi_1 \wedge \varphi_2 \wedge px''$ est équivalente dans T^* à *faux* ou à la brique svls relationnelle $(\succ)$-résolue $\varphi_1 \wedge \varphi'_2$. La formule (4.4) est donc équivalente dans T^* à *faux* ou à

$$\alpha''_1 \wedge \phi \wedge \varphi_1 \wedge \varphi'_2,$$

qui est une brique relationnelle $(\succ)$-résolue. Donc, T^* satisfait au deuxième point de la troisième condition de la définition 3.2.1.1.

T^* satisfait au troisième point de la troisième condition de la définition 3.2.1.1

Tout d'abord, nous allons présenter deux propriétés qui sont vraies dans tout S^*-modèle M^* de T^*. La première provient de l'axiomatisation de T^* et introduit la notion de *zero-infinie* dans M^*. La deuxième provient du dernier point de la définition de théorie flexible en utilisant également les axiomes 4 et 8 de T^*.

Propriété 4.2.3.2 *Soit M^* un S^*-modèle de T^* et Soit $f \in F^* - F_0$. L'ensemble des individus i de M^*, tels que $M^* \models \exists \overline{x}\, i = f\overline{x} \wedge \neg pi$, est infini*

Propriété 4.2.3.3 *Soit M^* un S^*-modèle de T^*. Soit $\bigwedge_{j\in J} r_j(x)$ une conjonction de S-relations, c'est-à-dire une conjonction de S-formules de la forme $rt_1...t_n$ avec $r \in R$ et t_i des S-termes. Soit $\exists x\, \bigwedge_{j\in J} r'_j(x)$ une instanciation de $\exists x\, \bigwedge_{j\in J} r_j(x)$ par des individus de M^*. Soit $\varphi(x)$ la formule*

$$p\,x \wedge \bigwedge_{j\in J} r'_j(x). \tag{4.5}$$

L'ensemble des individus i de M^* tel que $M^* \models \varphi(i)$ est vide ou infini.

Soit M^* un S^*-modèle de T^*. Rappelons que $\Psi(u)$ est l'ensemble des formules de la forme $\exists \bar{y}\, u = f\bar{y} \wedge \neg p\,u$, avec $f \in F^* - F_0$. Soit $\varphi(x)$ une formule qui appartient à A'', Montrons que pour toute variable x, on a $T^* \models \exists_{o\,\infty}^{\Psi(u)} x\, \varphi(x)$. Soit $\exists x\, \varphi'(x)$ une instanciation quelconque de $\exists \bar{x}\, \varphi(x)$ par des individus de M^* telle que $M^* \models \exists x\, \varphi'(x)$. Montrons qu'il existe une infinité d'individus i de M^* qui satisfait

$$M^* \models \varphi'(i) \wedge \neg\psi_1(i) \wedge \cdots \wedge \neg\psi_n(i),$$

avec $\psi_j(u) \in \Psi(u)$. Cette condition peut être remplacée par la condition plus forte

$$M^* \models \begin{pmatrix} p\,i\,\vee \\ \psi_{n+1}(i) \end{pmatrix} \wedge \varphi'(i) \wedge \neg\psi_1(i) \wedge \cdots \wedge \neg\psi_n(i),$$

où $\psi_{n+1}(u)$ est un élément de $\Psi(u)$ qui a été choisi différent de tous les $\psi_1(u), \ldots, \psi_n(u)$, (toujours possible car $F^* - F$ est infini d'après la définition de F^*). Du fait que pour tout k entre 1 et n, on ait

– $T^* \models p\,x \rightarrow \neg\psi_k(x)$

– $T^* \models \psi_{n+1}(x) \rightarrow \neg\psi_k(x)$ (axiome 2 de T^* conflit de symboles).

La condition précédente est simplifiée en

$$M^* \models (p\,i \wedge \varphi'(i)) \vee (\psi_{n+1}(i) \wedge \varphi'(i)).$$

Par conséquent, sachant $M^* \models \exists x\, \varphi'(x)$, il suffit de montrer qu'il existe une infinité d'individus i de M^* tels que

$$M^* \models p\,i \wedge \varphi'(i) \;\text{ or }\; M^* \models \psi_{n+1}(i) \wedge \varphi'(i). \tag{4.6}$$

Deux cas sont à étudier

Soit, la formule $p\,x$ apparaît dans $\varphi'(x)$. Du fait que $\varphi'(x)$ soit une instanciation d'une brique équationnelle ($\succ$)-résolue et que $M^* \models \exists x\, \varphi'(x)$, alors en utilisant l'axiome 4 de T^*, on déduit que la S^*-formule $p\,x \wedge \varphi'(x)$ est équivalente dans M^* à une S^*-formule de la forme (4.5). D'après la propriété 4.2.3.3 et du fait que $M^* \models \exists x\, p\,x \wedge \varphi'(x)$, il existe une infinité d'individus i de M^* tels que $M^* \models p\,i \wedge \varphi'(i)$ et donc tels que (4.6).

Soit, la S^*-formule $p\,x$ n'apparaît pas dans $\varphi'(x)$. Du fait que $\varphi'(x)$ soit une instanciation d'une brique relationnelle ($\succ$)-résolue et que $M^* \models \exists x\, \varphi'(x)$, alors la S^*-formule $\psi_{n+1}(x) \wedge \varphi'(x)$ est équivalente dans M^* à $\psi_{n+1}(x)$. D'après la propriété 4.2.3.2, il existe une infinité d'individus i de M^* tels que $M^* \models \psi_{n+1}(i)$, donc tels que $M^* \models \psi_{n+1}(i) \wedge \varphi'(i)$ et donc tels que (4.6).

Dans tous les cas, T^* satisfait à la troisième condition de la définition 3.2.1.1.

T^* satisfait à la quatrième condition de la définition 3.2.1.1

Montrons que toute conjonction de formules à plat est équivalente dans T^* à une disjonction d'éléments de A. Pour cela, il suffit de montrer que toute formule à plat est équivalente dans T^* à une disjonction de briques, puis effectuer une série de distribution des $\wedge$ sur les $\vee$. Soit alors φ une formule à plat. Si elle est de la forme *vrai*, *faux* ou $p\,x$ alors φ est une brique. Sinon, les équivalences suivantes, après distribution des $\wedge$ sur les $\vee$, donnent les combinaisons cherchées

$$T^* \models rx_0...x_n \leftrightarrow \begin{bmatrix} rx_0...x_n \wedge \\ \bigwedge_{i=0}^{n}(p\,x_i \vee \neg p\,x_i) \end{bmatrix},$$

$$T^* \models x_0 = x_1 \leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0 = x_1 \wedge \\ \bigwedge_{i=0}^{1}(p\,x_i \vee \neg p\,x_i) \end{bmatrix},$$

$$T^* \models x_0 = fx_1...x_n \leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0 = fx_1...x_n \wedge \\ \bigwedge_{i=0}^{n}(p\,x_i \vee \neg p\,x_i) \end{bmatrix},$$

avec $r \in R$ et $f \in F^*$. Donc T^* satisfait à la quatrième condition de la définition 3.2.1.1.

T^* satisfait à la cinquième condition

Montrons que pour toute S^*-proposition φ de la forme $\exists\bar{x}'\alpha' \wedge \alpha''$ avec $\exists\bar{x}'\alpha' \in A'$ et $\alpha'' \in A''$, on a $\bar{x} = \varepsilon$, $\alpha' \in \{vrai, faux\}$ et $\alpha'' \in \{vrai, faux\}$. Du fait que φ ne contienne pas de variables libres, alors il n'existe pas de variables accessibles ni d'équations accessibles dans $\exists\bar{x}'\alpha'$. Par conséquent, d'après la section 4.2.3, on a $\bar{x}' = \varepsilon$. D'après le choix de l'ensemble A', la S^*-formule α' est une brique $(\succ)$-résolue différente de la formule *faux*, donc du fait que $\exists\varepsilon\,\alpha'$ ne contienne pas de variables libres, alors α' est la formule *vrai*[25]. Donc la S^*-proposition φ est de la forme $\exists\varepsilon\, vrai \wedge \alpha''$. D'après le choix de l'ensemble A'' défini à section 4.2.3, α'' est une brique relationnelle $(\succ)$-résolue. Du fait que cette dernière ne contienne pas de variables libres alors c'est soit la formule *vrai*, soit la formule *faux*[26]. Donc la théorie T^* satisfait à la cinquième condition de la définition 3.2.1.1. □

La théorie T^* satisfait à toutes les conditions de la définition 3.2.1.1, par conséquent, elle est zéro-infini-décomposable et donc complète. Le théorème 4.2.1.5 et donc démontré.

4.3 Extension en arbres T^*_{ad} des rationnels additifs ordonnés

4.3.1 Axiomatisation

Soit $F = \{+, -, 0, 1\}$ un ensemble de symboles de fonction d'arités respectives $2, 1, 0, 0$. Soit $R = \{<\}$ un ensemble de symboles de relation contenant uniquement le symbole de relation binaire $<$, et soit alors S la signature $F \cup R$.

Notation 4.3.1.1 *Soit a un entier positif et $t_1, ..., t_n$ des S-termes. Notons*

- *Z l'ensemble des entiers,*
- *$t_1 < t_2$, le S-terme $< t_1 t_2$,*
- *$t_1 + t_2$, le S-terme $+ t_1 t_2$,*
- *$t_1 + t_2 + t_3$, le S-terme $+ t_1(+ t_2 t_3)$,*
- *$0.t_1$, le S-terme 0,*
- *$-a.t_1$, le S-terme $\underbrace{(-t_1) + \cdots + (-t_1)}_{a}$,*
- *$a.t_1$, le S-terme $\underbrace{t_1 + \cdots + t_1}_{a}$.*

Soit T_{ad} la S-théorie des rationnels additifs ordonnés. L'axiomatisation de T_{ad} est l'ensemble infini de S-propositions de l'une des 14 formes suivantes

1 $\forall x \forall y\, x + y = y + x$,
2 $\forall x \forall y \forall z\, x + (y + z) = (x + y) + z$,
3 $\forall x\, x + 0 = x$,

[25] La formule α' ne contient pas de sous-formules de la forme $f_1 = f_2$ avec f_1 et f_2 des constantes de F car α' est $(\succ)$-résolue par conséquent toutes les S-équations sont formatées.

[26] La formule α'' ne contient pas de sous-formules de la forme $r f_1 ... f_n$ avec $r \in R$ et f_i des constantes de F car α' est $(\succ)$-résolue par conséquent toutes les S-relations sont formatées.

4 $\forall x\, x + (-x) = 0,$
5_n $\forall x\, n.x = 0 \rightarrow x = 0, \quad (n \neq 0)$
6_n $\forall x\, \exists! y\, n.y = x, \quad (n \neq 0)$
7 $\forall x\, \neg x < x,$
8 $\forall x \forall y \forall z\, (x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z,$
9 $\forall x \forall y\, (x < y \vee x = y \vee y < x),$
10 $\forall x \forall y\, x < y \rightarrow (\exists z\, x < z \wedge z < y),$
11 $\forall x\, \exists y\, x < y,$
12 $\forall x\, \exists y\, y < x,$
13 $\forall x\, \forall y\, \forall z\, x < y \rightarrow (x + z < y + z),$
14 $0 < 1.$

avec n un entier non nul. Cette théorie à une propriété commode que nous allons utiliser tout au long des nos démonstrations

Propriété 4.3.1.2

$$T_{ad} \models \sum_{i=1}^{n} a_i.x_i = a_0.1 \leftrightarrow a_k.x_k = \sum_{i=1, i\neq k}^{n} (-a_i).x_i + a_0.1,$$

pour tout $k \in \{1, ..., n\}$.

Soit maintenant F^* un ensemble infini de symboles de fonction contenant l'ensemble $\{+, -, 0, 1\}$. Soit $R^* = \{<, p\}$ un ensemble de symboles de relation contenant le symbole $<$ ainsi qu'un symbole de relation unaire p. Soit alors S^* la signature $F^* \cup R^*$. En utilisant les transformations de la section 4.1.1, l'axiomatisation de T^*_{ad} est l'ensemble infini des S^*-propositions de l'une des 21 formes suivantes

1 $\forall \bar{x} \forall \bar{y}\, ((\neg p\, f\bar{x}) \wedge (\neg p\, f\bar{y}) \wedge f\bar{x} = f\bar{y}) \rightarrow \bigwedge_i x_i = y_i,$
2 $\forall \bar{x} \forall \bar{y}\, f\bar{x} = g\bar{y} \rightarrow p\, f\bar{x} \wedge p\, g\bar{y},$
3 $\forall \bar{x} \forall \bar{y}\, (\bigwedge_{i\in I} p\, x_i) \wedge (\bigwedge_{j\in J} \neg p\, y_j) \rightarrow (\exists! \bar{z}\, \bigwedge_{k\in K} (\neg p\, z_k \wedge z_k = t_k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}))),$
4 $\forall x \forall y\, x < y \rightarrow (p\, x \wedge p\, y),$
5 $\forall x \forall y\, p\, x + y \leftrightarrow p\, x \wedge p\, y,$
6 $\forall x\, p\, -x \leftrightarrow p\, x,$
7 $\forall \bar{x}\, \neg p\, h\bar{x},$
8 $\forall x \forall y\, (p\, x \wedge p\, y) \rightarrow x + y = y + x,$
9 $\forall x \forall y \forall z\, (p\, x \wedge p\, y \wedge p\, z) \rightarrow x + (y + z) = (x + y) + z,$
10 $\forall x\, p\, x \rightarrow x + 0 = x,$
11 $\forall x\, p\, x \rightarrow x + (-x) = 0,$
12_n $\forall x\, p\, x \rightarrow (nx = 0 \rightarrow x = 0), \quad (n \neq 0)$
13_n $\forall x\, p\, x \rightarrow \exists! y\, p\, y \wedge ny = x, \quad (n \neq 0)$
14 $\forall x\, p\, x \rightarrow \neg x < x,$
15 $\forall x \forall y \forall z\, p\, x \wedge p\, y \wedge p\, z \rightarrow ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z),$
16 $\forall x \forall y\, (p\, x \wedge p\, y) \rightarrow (x < y \vee x = y \vee y < x),$
17 $\forall x \forall y\, (p\, x \wedge p\, y) \rightarrow (x < y \rightarrow (\exists z\, p\, z \wedge x < z \wedge z < y)),$
18 $\forall x\, p\, x \rightarrow (\exists y\, p\, y \wedge x < y),$
19 $\forall x\, p\, x \rightarrow (\exists y\, p\, y \wedge y < x),$
20 $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (p\, x \wedge p\, y \wedge p\, z) \rightarrow (x < y \rightarrow (x + z < y + z)),$
21 $0 < 1,$

avec f et g deux symboles de fonction distincts pris dans F^*, $h \in F^* - F$, x, y, z des variables, $\bar{x}$ un vecteur de variables x_i, $\bar{y}$ un vecteur de variables y_i, $\bar{z}$ un vecteur de variables z_i toutes distinctes et $t_k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ un S^*-terme qui commence par un symbole de fonction f_k élément de F^* suivi par des variables prises dans $\bar{x}$ ou $\bar{y}$ ou $\bar{z}$, de plus, si $f_k \in F$ alors $t_k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ contient au moins une variable de $\bar{y}$ ou $\bar{z}$. Une théorie similaire à celle-ci a été introduite par A. Colmerauer pour la modélisation du modèle de Prolog III [6].

Notons que la théorie des arbres et la théorie des rationnels ont des signatures non-disjointes ; en effet, les symboles $+$ et $-$ sont des constructeurs d'arbres dans la théorie des arbres et des opérations d'addition et de soustraction dans la théorie des rationnels. Notons également que T^*_{ad} n'admet pas d'élimination complète de quantificateurs. En effet, la S^*-formule $\exists x\, y = fx$ avec $f \in F - \{+, -, 0, 1\}$ ne peut pas être simplifiée d'avantage ni dans T^*_{ad} ni dans la théorie des arbres.

4.3.2 Complétude

Théorème 4.3.2.1 *L'extension en arbres T^*_{ad} des rationnels additifs ordonnés T_{ad} est une théorie complète.*

D'après le théorème 4.2.1.5, il suffit de montrer que T_{ad} est flexible pour que T^*_{ad} soit zéro-infini-décomposable et donc complète. Montrons alors la propriété suivante

Propriété 4.3.2.2 *La théorie T_{ad} des rationnels additifs ordonnés est une théorie flexible.*

Preuve. Montrons maintenant que T_{ad} satisfait aux trois conditions de la définition 4.2.1.4. Afin d'alléger cette preuve, nous allons omettre le préfixe S aux mots : équations, relations, termes, formules, car nous allons travailler uniquement sur la théorie T_{ad} de signature S.

Notons $\sum_{i=1}^{n} t_i$, le terme $\overline{t_1 + t_2 + ... + t_n} + 0$, où $\overline{t_1 + t_2 + ... + t_n}$ est le terme $t_1 + t_2 + ... + t_n$ dans lequel nous avons supprimé tous les termes t_i qui sont égaux à 0. Pour $n = 0$ le terme $\sum_{i=1}^{n} t_i$ se réduit au terme 0. Les formules de la forme $\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i = a_0.1$ et $\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i < a_0.1$ avec $a_i \in Z$ sont appelées *blocs* dans T_{ad}. D'après la définition 4.2.1.1, et du fait que pour tout $x_j \in var(\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i = a_0.1)$ avec $a_j \neq 0$ on ait $T_{ad} \models \exists! x_j \sum_{i=1}^{n} a_i.x_i = a_0.1$, (propriété 4.3.1.2 et axiome 6_n de T_{ad}), alors le représentant d'une équation de la forme $\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i = a_0.1$ se réduit tout simplement à la plus grand variable x_k avec $k \in \{1, ..., n\}$ telle que $a_k \neq 0$.

T_{ad} satisfait à la première condition de la définition 4.2.1.4

Il faut montrer que toute conjonction d'équations et de relations est équivalente dans T à une conjonction formatée de formules atomiques svls, c'est-à-dire, à une conjonction α svls de formules atomiques telle que

1. α ne contient pas de sous-formules de la forme $f_1 = f_2$ ou $r f_1 ... f_n$ ou $y = x$, avec $f_i \in \{0, 1\}$, $r \in \{<\}$ et $x \succ y$,
2. chaque équation de α a un représentant distinct qui n'a pas d'occurrence dans d'autres équations ou relations de α,
3. si α' est la conjonction des équations de α, alors pour tout $x \in var(\alpha')$ on a $T_{ad} \models \exists ? x\, \alpha'$.

Introduisons dans un premier temps, l'ensemble des règles de réécriture suivantes qui transforment toute conjonction de formules à plat soit à *faux*, soit en une conjonction formatée de blocs svls équivalente dans T_{ad}.

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \mathit{faux} \wedge \alpha & \Longrightarrow \quad \mathit{faux} \\
(2) & 0 = 0.1 & \Longrightarrow \quad \mathit{vrai} \\
(3) & 0 = a_0.1 & \Longrightarrow \quad \mathit{faux} \\
(4) & x = y & \Longrightarrow \quad x + (-1).y = 0.1 \\
(5) & x = -y & \Longrightarrow \quad x + y = 0.1 \\
(6) & x = y + z & \Longrightarrow \quad x + (-1).y + (-1).z = 0.1 \\
(7) & \left[\begin{array}{l} \sum_{i=1}^n a_i.x_i = a_0.1 \wedge \\ \sum_{i=1}^n b_i.x_i = b_0.1 \end{array} \right] & \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sum_{i=1}^n a_i.x_i = a_0.1 \wedge \\ \sum_{i=1}^n (b_k a_i - a_k b_i).x_i = (b_k a_0 - a_k b_0).1 \end{array} \right] \\
(8) & \left[\begin{array}{l} \sum_{i=1}^n a_i.x_i = a_0.1 \wedge \\ \sum_{i=1}^n b_i.x_i < b_0.1 \end{array} \right] & \Longrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \sum_{i=1}^n a_i.x_i = a_0.1 \wedge \\ \sum_{i=1}^n \lambda(b_k a_i - a_k b_i).x_i < (b_k a_0 - a_k b_0).1 \end{array} \right]
\end{array}
$$

Dans la règle (3), $a_0 \neq 0$. Dans les règles (7) et (8), la variable x_k est le représentant de l'équation $\sum_i a_i.x_i = a_0.1$ et $b_k \neq 0$. Dans la règle (8), $\lambda = 1$ si $a_k > 0$ et $\lambda = -1$ sinon. Bien entendu, toute application répétée de ces règles termine et produit bien soit *faux* soit une conjonction formatée svls de blocs équivalente dans T_{ad}.

Soit maintenant α une conjonction de formules atomiques. En insérant des variables quantifiées existentiellement pour mettre à plat les formules atomiques de α, la formule α est équivalente dans T_{ad} à une formule de la forme $\exists \bar{x}\, \beta$ avec β une conjonction de formules à plat. Choisissons maintenant un ordre $\succ$ de variables, tel que les variables de $\bar{x}$ soient supérieures aux variables libres de $\exists \bar{x}\, \beta$. Soit alors δ la formule obtenue à partir de β après application des règles précédentes de réécriture. Deux cas sont à étudier :

Soit, δ est la formule *faux*, donc la formule $\exists \bar{x}\, \delta$ est équivalente à *faux* dans T_{ad}, par conséquent, la conjonction α de départ est équivalente à *faux* dans T_{ad} qui est bien une formule atomique formatée dans T_{ad}.

Soit, δ est une conjonction formatée de blocs telle que chaque variable de $\bar{x}$ a une occurrence comme représentant d'une équation de δ. Cette petite restriction provient de l'ordre $\succ$ qui a été choisi tel que les variables de $\bar{x}$ soient supérieures aux variables libres de $\exists \bar{x}\, \beta$. Ainsi, la formule δ est de la forme

$$(\bigwedge_{i \in I} \delta_{x_i}) \wedge \delta^*,$$

où chaque δ_{x_i} est une équation de δ dont le représentant x_i est une variable de $\bar{x}$ et où δ^* est une conjonction de blocs ne contenant aucune occurrence des variables de $\bar{x}$. La formule $\exists \bar{x} \beta$ est donc équivalente dans T_{ad} à

$$\delta^* \wedge (\exists \bar{x} \bigwedge_{i \in I} \delta_{x_i}),$$

qui, du fait que chaque représentant x_i n'apparaît pas dans une autre équation, est équivalente dans T_{ad} à

$$\delta^* \wedge \bigwedge_{i \in I} (\exists x_i\, \delta_{x_i}),$$

qui, du fait que pour chaque représentant x_i on ait $T_{ad} \models \exists! x_i \delta_{x_i}$, est équivalente dans T_{ad} à δ^*. La formule de départ α est donc équivalente à la formule δ^* qui est une conjonction formatée de blocs et donc de formules atomiques. La théorie T_{ad} satisfait donc à la première condition de la définition 4.2.1.4.

T_{ad} satisfait à la deuxième condition de la définition 4.2.1.4

Montrons que toute formule de la forme $\neg\alpha$, où α est une conjonction de relations, est équivalente dans T_{ad} à une disjonction d'équations et de relations. D'après le point précédent, la formule α est équivalente dans T_{ad} à une conjonction de blocs de la forme $\sum_{j=1}^{n} b_j.x_j < b_0.1$. Du fait que l'ordre soit total, alors on a

$$T_{ad} \models \neg(\sum_{j=1}^{n} b_j.x_j < b_0.1) \leftrightarrow ((\sum_{j=1}^{n}(-b_j).x_j < (-b_0).1) \vee (\sum_{j=1}^{n} b_j.x_j = b_0.1))$$

Donc la formule $\neg\alpha$ est équivalente dans T_{ad} à une disjonction de blocs, donc une disjonction d'équations et de relations. La théorie T_{ad} satisfait donc bien à la deuxième condition de la définition 4.2.1.4.

T_{ad} satisfait à la troisième condition de la définition 4.2.1.4

Montrons que pour toute conjonction de relations β et toute variable x on a
- la formule $\exists x\, \beta$ est équivalente dans T_{ad} soit à *faux*, soit à une conjonction svls de relations,
- $T_{ad} \models \exists_{o\,\infty}^{\{faux\}} x\, \beta$.

Le premier point est évident et provient de l'élimination de Fourier dans les rationnels additifs ordonnés. Le deuxième point provient du fait que l'ordre soit dense et sans extrêmes. Soit M un modèle de T_{ad}. Pour toute instanciation $\exists x\, \beta'(i)$ de $\exists x\, \beta(i)$ par des individus de M si $M \models \beta'(i)$, alors il existe une infinité d'individus i de M tels que $M \models \beta'(i)$ donc $T_{ad} \models \exists_{o\,\infty}^{\{faux\}} x\, \beta$.

La théorie T_{ad} est donc flexible, par conséquent son extension en arbres T_{ad}^* est zéro-infini-décomposable et donc complète. □

4.4 Discussion et conclusion partielle

Du fait que la théorie des arbres n'admette pas d'élimination complète de quantificateurs, alors toute extension en arbres d'une théorie T quelconque du premier ordre n'admet pas une élimination complète de quantificateurs. Cette propriété provient de la manière dont nous axiomatisons T^* et constitue la difficulté majeure pour montrer la complétude de T^*. Par ailleurs, il existe plusieurs applications pratiques des théories étendues en arbres. Notons que ces théories sont dotées d'un très grand pouvoir d'expression et permettent de modéliser sous forme de contraintes du premier ordre des problèmes qui utilisent des constructions d'arbres et dont les feuilles s'évaluent par d'autres théories. On citera par exemple les contraintes modélisant les positions k-gagnantes des jeux à deux partenaires utilisées par A. Colmerauer et B. Dao [16, 7] qui se modélisent plus facilement en utilisant une extension en arbres des entiers additifs ordonnés. L'idée d'une éventuelle extension du modèle de Prolog IV par d'autres théories utilise également cette notion d'extension en arbres de théories. En effet, ce travail est une perspective d'extension du modèle de Prolog IV, en permettant à l'utilisateur de quantifier existentiellement ou universellement les clauses hybrides de Prolog. On utilisera alors l'algorithme de décision des théories zéro-infni-décomposables pour décider de la valeur de ces clauses. D'autre part, il serait également intéressant de pouvoir résoudre des formules hybrides avec variables libres en exprimant les solutions des variables libres d'une manière claire et précise ! Les deux algorithmes présentés aux chapitres 2 et 3 ne permettent pas pour le moment de répondre à ce genre de requêtes. Un tel travail demanderait certainement des définitions syntaxiques et sémantiques beaucoup plus complexes que celles utilisées jusqu'à maintenant ainsi que des conditions beaucoup plus élaborées sur T pour obtenir un tel algorithme sur T^*. Soit alors l'extension T_{ad}^* des rationnels additifs ordonnés et essayons de trouver un algorithme de résolution de contraintes générales dans T^*_{ad} ! Ceci fera l'objet du chapitre 5.

Chapitre 5

Résolution de contraintes du premier ordre dans T^*_{ad}

Sommaire

Nous présentons dans ce chapitre un algorithme de résolution effective de contraintes générales dans la théorie T^*_{ad}. Après avoir présenté une axiomatisation plus commode de T^*_{ad} que celle donnée dans le chapitre 4, nous introduisons un exemple concret de contraintes dans T^*_{ad} et présentons notre algorithme de résolution sous la forme d'un ensemble de 28 règles de réécriture, qui transforment toute formule φ en une disjonction svls ϕ de formules résolues, équivalente à φ dans T^*_{ad} et telle que ϕ est soit la formule *vrai*, soit la formule *faux*, soit une formule ayant au moins une variable libre et n'étant équivalente ni à *vrai* ni à *faux* dans T^*_{ad}. On présentera également les solutions des variables libres d'une manière claire et explicite. Ce dernier point représente la différence majeure entre cet algorithme et l'algorithme général des théories zéro-infini-décomposables. Nous terminons ce chapitre par un exemple de résolution de contraintes dans T^*_{ad}. Notons que ce chapitre a fait l'objet des publications suivantes [14], [17], [21].

5.1 Contraintes du premier ordre dans T^*_{ad}

5.1.1 Une axiomatisation commode de T^*_{ad}

Soit F un ensemble infini de symboles de fonction contenant notamment les symboles $\{+, -, 0, 1\}$ d'arités respectives $2, 1, 0, 0$. Soit R un ensemble de symboles de relation, contenant les symboles de relations unaires *num* et *arbre* .

Soit a un entier positif et soient $t_1, ..., t_n$ des termes. Notons :

- Z l'ensemble des entiers,
- $t_1 < t_2$, le terme $< t_1 t_2$,
- $t_1 + t_2$, le terme $+t_1 t_2$,
- $t_1 + t_2 + t_3$, le terme $+t_1(+t_2 t_3)$,
- $0.t_1$, le terme 0,
- $-a.t_1$, le terme $\underbrace{(-t_1) + \cdots + (-t_1)}_{a}$,
- $a.t_1$, le terme $\underbrace{t_1 + \cdots + t_1}_{a}$,
- $\Sigma_{i=1}^{n} t_i$, le terme $\overline{t_1 + \ldots + t_n} + 0$ avec $\overline{t_1 + \ldots + t_n}$ le terme $t_1 + \ldots + t_n$ où tous les termes 0 ont été supprimés. Pour $n = 0$ on obtient le terme 0.

La théorie T^*_{ad} de l'extension en arbres des rationnels additifs ordonnés consiste en l'ensemble infini des propositions de l'une des formes suivantes

1 $\forall\bar{x}\forall\bar{y}\,(arbre\, f\bar{x} \wedge arbre\, f\bar{y} \wedge f\bar{x} = f\bar{y}) \rightarrow \bigwedge_i x_i = y_i$,
2 $\forall\bar{x}\forall\bar{y}\, f\bar{x} = g\bar{y} \rightarrow num\, f\bar{x} \wedge num\, g\bar{y}$,
3 $\forall\bar{x}\forall\bar{y}\,(\bigwedge_{i\in I} num\, x_i) \wedge (\bigwedge_{j\in J} arbre\, y_j) \rightarrow (\exists!\bar{z}\, \bigwedge_{k\in K}(arbre\, z_k \wedge z_k = t_k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})))$,
4 $\forall x\forall y\, x < y \rightarrow (num\, x \wedge num\, y)$,
5 $\forall x\forall y\, num\, x + y \leftrightarrow num\, x \wedge num\, y$,
6 $\forall x\, num\, -x \leftrightarrow num\, x$,
7 $\forall\bar{x}\, arbre\, h\bar{x}$,
8 $\forall x\forall y\,(num\, x \wedge num\, y) \rightarrow x + y = y + x$,
9 $\forall x\forall y\forall z\,(num\, x \wedge num\, y \wedge num\, z) \rightarrow x + (y + z) = (x + y) + z$,
10 $\forall x\, num\, x \rightarrow x + 0 = x$,
11 $\forall x\, num\, x \rightarrow x + (-x) = 0$,
12_n $\forall x\, num\, x \rightarrow (nx = 0 \rightarrow x = 0)$,
13_n $\forall x\, num\, x \rightarrow \exists!y\, num\, y \wedge ny = x$,
14 $\forall x\, num\, x \rightarrow \neg x < x$,
15 $\forall x\forall y\forall z\, num\, x \wedge num\, y \wedge num\, z \rightarrow ((x < y \wedge y < z) \rightarrow x < z)$,
16 $\forall x\forall y\,(num\, x \wedge num\, y) \rightarrow (x < y \vee x = y \vee y < x)$,
17 $\forall x\forall y\,(num\, x \wedge num\, y) \rightarrow (x < y \rightarrow (\exists z\, num\, z \wedge x < z \wedge z < y))$,
18 $\forall x\, num\, x \rightarrow (\exists y\, num\, y \wedge x < y)$,
19 $\forall x\, num\, x \rightarrow (\exists y\, num\, y \wedge y < x)$,
20 $\forall x\,\forall y\,\forall z\,(num\, x \wedge num\, y \wedge num\, z) \rightarrow (x < y \rightarrow (x + z < y + z))$,
21 $\forall x\, numx \leftrightarrow \neg arbre\, x$
22 $0 < 1$,

où n est un entier non nul, f et g sont deux symboles de fonction distincts de F, $h \in F - \{+, -, 0, 1\}$, x, y, z sont des variables, $\bar{x}$ est un vecteur de variables x_i, $\bar{y}$ est un vecteur de variables y_i, $\bar{z}$ est un vecteur de variables distinctes z_i et où $t_k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ est un terme qui commence par un symbole de fonction $f_k \in F - \{0, 1\}$ suivi de variables prises dans $\bar{x}$ ou $\bar{y}$ ou $\bar{z}$, de plus, si $f_k \in \{+, -\}$ alors $t_k(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ contient au moins une variable de $\bar{y}$ ou $\bar{z}$.

Cette axiomatisation est une version plus commode que celle donnée dans le chapitre 4, dans le sens où elle fait intervenir explicitement le symbole de relation *arbre* . Ce choix a été fait uniquement par souci d'esthétique, afin d'alléger nos définitions et de rendre les règles de notre algorithme de résolution un peu plus facile à comprendre.

Des axiomes 6,8,9,10,11 et 12, nous avons la propriété suivante

Propriété 5.1.1.1 *Pour tout* $k \in \{1, ..., n\}$ *on a*

$$T \models (\Sigma_{i=1}^{k} a_i.x_i = a_0.1 \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} num\, x_i) \leftrightarrow (a_k x_k = \Sigma_{i=1, i\neq k}^{k}(-a_i).x_i + a_0.1 \wedge \bigwedge_{i=1}^{k} num\, x_i).$$

5.1.2 Exemple de contrainte du premier ordre dans T^*_{ad}

Nous présentons maintenant un exemple concret de *contrainte* du premier ordre dans T^*_{ad}. Considérons ce jeu à deux joueurs : une paire de rationnels non négatifs (n, m) est donnée. Chaque joueur à tour de rôle, soustrait 1 ou 2 de n ou de m sans les rendre négatifs. Le premier qui ne peut plus jouer perd.

Supposons que c'est au tour de A de jouer. Une position (n, m) est appelée *k-gagnante* si, quelque soit la façon de jouer de l'autre joueur B, il est toujours possible pour A de gagner après avoir fait au plus k coups. La contrainte $gagnant_k(x)$ définie en [7] et exprimant qu'une position x est k-gagnante, est de la forme suivante

$$\left[\begin{array}{l} \quad\exists y coup(x,y) \wedge \neg(\exists x coup(y,x) \wedge \\ \neg(\exists y coup(x,y) \wedge \neg(\exists x coup(y,x) \wedge \neg(\ldots \wedge \\ \neg(\exists y coup(x,y) \wedge \neg(\exists x coup(y,x) \wedge \neg(faux \underbrace{))\ldots)}_{2k} \end{array}\right].$$

Chaque position (n, m) est représentée par $c(i, j)$ avec c un symbole de fonction d'arité 2 et i et j des rationnels. La contrainte $coup(x, y)$ peut être définie par la formule du premier ordre suivante

$$\left[\begin{array}{l} (\exists i \exists j\, x = c(i,j) \wedge y = c(i-1,j) \wedge i > 1 \wedge j > 0) \vee \\ (\exists i \exists j\, x = c(i,j) \wedge y = c(i-2,j) \wedge i > 2 \wedge j > 0) \vee \\ (\exists i \exists j\, x = c(i,j) \wedge y = c(i,j-1) \wedge i > 0 \wedge j > 1) \vee \\ (\exists i \exists j\, x = c(i,j) \wedge y = c(i,j-2) \wedge i > 0 \wedge j > 2) \vee \\ (\neg(\exists i \exists j\, x = c(i,j) \wedge num\, i \wedge num\, j) \wedge x = y) \end{array}\right].$$

En remplaçant la définition de $coup$ dans la contrainte $gagnant_k(x)$, nous obtenons une contrainte du premier ordre avec une variable libre x dans la théorie T^*_{ad}. Résoudre cette contrainte dans T^*_{ad}, signifie trouver toutes les positions x qui sont k-gagnantes.

5.2 Blocs et blocs quantifiés dans T^*_{ad}

Nous allons maintenant définir une famille de formules structurées qu'on appellera *bloc*. Nous montrerons alors que ces blocs ont des propriétés utiles qui nous permettrons de valider nos règles de réécriture.

5.2.1 Blocs et blocs résolus dans T^*_{ad}

Supposons que les variables de V soient ordonnées par un ordre strict, total, dense et sans extrêmes, noté $\succ$. Pour chaque formule φ, les variables liées sont renommées de telle façon que pour chaque sous-formule de φ on ait $x \succ y$ pour chaque variable liée x et chaque variable libre y.

On appelle *représentant* de l'équation $x_0 = f x_1 ... x_n$ ou $x_0 = x_1$, avec $f \in F - \{0, 1\}$, la variable x_0. On appelle représentant de la formule $\Sigma_{i=1}^{n} a_i.x_i = a_0.1$, avec $a_i \in Z$ pour tout $i \in \{0, ..., n\}$, la plus grande variable x_k dans l'ordre $\succ$ telle que $a_k \neq 0$.

Soient $f \in F$ et $a_i \in Z$ pour tout $i \in \{0, ..., n\}$. On appelle *formule basique* toute conjonction α de formules de la forme

- *vrai*, *faux*,
- $num\, x$, $arbre\, x$,
- $x = y$, $x = fy_1...y_n$,
- $\Sigma_{i=1}^n a_i.x_i = a_0.1$, $\Sigma_{i=1}^n a_i.x_i < a_0.1$.

Les formules $num\, x$ et $arbre\, x$ sont appelées *contraintes de typage.*

Soit α une formule basique

(1) On dit que $num\, x$ est *une conséquence* de α, si α contient au moins une des sous-formules suivantes

- $num\, x$, $x = y \wedge num\, y$, $x = 0$, $x = 1$,
- $y = x \wedge num\, y$, $x = -y \wedge num\, y$, $y = -x \wedge num\, y$,
- $z = y + x \wedge num\, z$, $z = x + y \wedge num\, z$, $x = y + z \wedge num\, z \wedge num\, y$,
- $\Sigma_{i=1}^n a_i.x_i = a_0.1$ ou $\Sigma_{i=1}^n a_i.x_i < a_0.1$ avec x un des x_i.

(2) On dit que $arbre\, x$ est *une conséquence* de α, si α contient au moins une des sous-formules suivantes

- $x = y \wedge arbre\, y$, $y = x \wedge arbre\, y$,
- $x = -y \wedge arbre\, y$, $y = -x \wedge arbre\, y$,
- $x = y+z \wedge arbre\, z$, $x = z+y \wedge arbre\, z$, $y = x+z \wedge arbre\, y \wedge num\, z$, $y = z+x \wedge arbre\, y \wedge num\, z$,
- $arbre\, x$, $x = hy_1...y_n$, avec $h \in F - \{+, -, 0, 1\}$.

(3) On appelle *section arborescente* de α, la conjonction α_t des sous-formules de α de la forme

- *vrai*, $arbre\, x$,
- $x = y$ ou $x = fy_1...y_n$, avec $f \in F - \{0, 1\}$ et où x est telle que $arbre\, x$ est une sous-formule de α.

Cette section α_t est *formatée*, si les membres gauches des équations de α_t sont tous distincts et pour chaque équation de la forme $x = y$ de α_t on a $x \succ y$.

(4) On appelle *section numérique* de α, la conjonction α_n des sous-formules de α de la forme

- *vrai*, *faux*, $num\, x$,
- $\Sigma_{i=1}^n a_i.x_i = a_0.1$, $\Sigma_{i=1}^n a_i.x_i < a_0.1$,
- $x = y$, $x = -y$, $x = y + z$, où x est telle que $num\, x$ est une sous-formule de α.

Cette section α_n est *consistante* ssi $T_{ad}^* \models \exists \bar{x}\, \alpha_n$ avec $\bar{x} = var(\alpha_n)$. Elle est dite *formatée* si

- α_n ne contient pas de sous-formule de la forme $x = y$, $x = -y$, $x = y + z$, $0 = a_0 1$, $0 < a_0 1$, avec $a_0 \in Z$,
- α_n est consistante et chaque représentant d'une équation de α_n a une occurrence dans une seule équation de α_n et pas d'occurrences dans les inéquations de α_n.

Une variable u est dite *accessible* dans $\exists \bar{x} \alpha$, si u est une variable libre dans $\exists \bar{x} \alpha$, ou α a une sous-formule de la forme $y = t(u) \wedge arbre\, y$ avec $t(u)$ un terme contenant u et y est une variable accessible. Dans le dernier cas, l'équation $y = t(u)$ est dite accessible dans $\exists \bar{x} \alpha$.

Des axiomes 1 et 2 de T_{ad}^*, on a la propriété suivante

Propriété 5.2.1.1 *Soit α une formule basique. Si toutes les variables de $\bar{x}$ sont accessibles dans $\exists \bar{x}\, \alpha$, alors $T_{ad}^* \models \exists ? \bar{x} \alpha$.*

On appelle *bloc* toute formule basique α, telle que pour chaque variable x dans α, soit $num\, x$ soit $arbre\, x$ est une sous-formule de α et α ne contient pas de sous-formules de la forme

- $x = 0 \wedge arbre\, x$, $x = 1 \wedge arbre\, x$,
- $x = y \wedge num\, x \wedge arbre\, y$, $x = y \wedge arbre\, x \wedge num\, y$,
- $x = -y \wedge arbre\, x \wedge num\, y$, $x = -y \wedge num\, x \wedge arbre\, y$

– $x = y + z \wedge num\, x \wedge arbre\, y$, $x = y + z \wedge num\, x \wedge arbre\, z$, $x = h\bar{y} \wedge num\, x$,
– $x = y + z \wedge arbre\, x \wedge num\, y \wedge num\, z$,
– $\Sigma_{i=1}^{n} a_i.x_i = a_0.1 \wedge arbre\, x_k$, $\Sigma_{i=1}^{n} a_i.x_i < a_0.1 \wedge arbre\, x_k$

avec $h \in F - \{+, -, 0, 1\}$, $k \in \{1, ..., n\}$ et $a_i \in Z$ pour tout $i \in \{0, ..., n\}$.

Du fait que chaque variable x dans un bloc a un typage $num\, x$ ou $arbre\, x$, tout bloc α peut être divisé en deux sections disjointes : une section arborescente et une section numérique.

Un bloc α sans équations est appelé *bloc relationnel*. Un bloc α sans inéquations et où chaque variable a une occurrence dans au moins une équation de α est appelé *bloc équationnel*. Un bloc α est *résolu*, si ses sections arborescente et numérique sont formatées.

Du fait que dans un bloc résolue, la section numérique est consistante et du fait des axiomes 3 et 13_n, alors on a la propriété suivante

Propriété 5.2.1.2 *Soient α un bloc résolu et $\bar{x}$ le vecteur des variables de α. On a $T^*_{ad} \models \exists\bar{x}\alpha$.*

5.2.2 Propriétés des blocs résolus dans T^*_{ad}

Propriété 5.2.2.1 *Soit α un bloc équationnel résolue. Soit $\bar{x}$ le vecteur des représentants des équations de α. Soit α^* la conjonction des contraintes de typage de α de la forme $arbre\, x$ ou $num\, x$ avec x ne figurant pas dans $\bar{x}$. On a*

$$T \models \alpha^* \rightarrow \exists!\bar{x}\, \alpha$$

Preuve. Cette propriété est une conséquence des axiomes 3 et 13_n de T^*_{ad} sur un bloc résolu. En effet, du fait que les équations de la section arborescente de α aient des représentants distincts, c'est-à-dire, des membres gauches distincts, et du fait que les équations de la section numérique de α aient des représentants distincts qui ont une occurrence dans uniquement une seule équation de la section numérique de α, alors en transformant toutes les équations de cette section numérique en formules de la forme $a_k.x_k = \sum_{i=1, i\neq k}(-a_i).x_i + a_0.1$ où x_k est le représentant de l'équation $\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i = a_0.1$ (propriété 5.1.1.1), alors les membres gauches de ces équations seront tous distincts et n'auront pas d'occurrences dans d'autres équations de la section numérique de α. Donc, dans tout modèle de T^*_{ad}, pour toute instanciation des variables qui figurent dans les membres droits par des valeurs qui respectent les contraintes de typage, il existe une valeur unique pour les représentants de ces équations, (axiome 13_n). Pour chacune de ces valeurs et pour chaque instanciation des variables qui ne sont pas des représentants dans des équations de la section arborescente de α par des valeurs qui respectent les contraintes de typage de α, il existe une valeur unique pour les représentants des équations de la section arborescente de α (axiome 3). Notons que les instanciations sont conditionnées par le fait qu'elles doivent respecter les contraintes de typage de α, ce qui explique le sens de l'implication dans cette propriété. □

Exemple 5.2.2.2 *Soient x, y, z, v, w des variables telles que $x \succ y \succ z \succ v \succ w$. On a*

$$T \models num\, w \rightarrow \exists!vxzy \begin{bmatrix} x = fxyw \wedge y = x \wedge \\ 2.z + 2.w = 1 \wedge 3.v + w = 0.1 \wedge \\ arbre\, x \wedge num\, v \wedge num\, w \wedge \\ arbre\, y \wedge num\, z \end{bmatrix}$$

Cette propriété peut s'écrire de la forme suivante en utilisant la propriété 5.1.1.1

$$T \models num\, w \rightarrow \exists!vxzy \begin{bmatrix} x = fxyw \wedge y = x \wedge \\ 2.z = 1 + (-2).w \wedge 3.v = (-1).w \wedge \\ arbre\, x \wedge num\, v \wedge num\, w \wedge \\ arbre\, y \wedge num\, z \end{bmatrix}$$

Pour chaque instanciation de w par des valeurs numériques (donc non arborescentes), il existe une et une seule valeur pour v et z (axiome 13_n), et donc une seule valeur pour x et y (axiome 3). Notons que si la variable w est instanciée par une valeur arborescente par exemple $f(g(0))$, cette formule sera alors équivalente à faux dans tout modèle de T^*_{ad} d'après les axiomes 5 et 21 et par conséquent

$$T^*_{ad} \not\models \exists! vxzy \begin{bmatrix} x = fxyw \wedge y = x \wedge \\ z + 2.w = 1 \wedge v + w = 0 \wedge \\ \mathit{arbre}\, x \wedge \mathit{num}\, v \wedge \mathit{num}\, w \wedge \\ \mathit{arbre}\, y \wedge \mathit{num}\, z \end{bmatrix}.$$

Propriété 5.2.2.3 *Soit α et β deux blocs résolus ayant les mêmes sections numériques et les mêmes contraintes de typage. Soient α_t et β_t les sections arborescentes de α et β. Si $T^*_{ad} \models \alpha \rightarrow \beta$ et si α_t et β_t ont le même ensemble de membres gauches d'équations, alors $T^*_{ad} \models \alpha \leftrightarrow \beta$.*

Preuve. Du fait que α et β aient la même section numérique et les mêmes contraintes de typage, alors il existe une formule δ telle que $\alpha = \delta \wedge \alpha_t$ et $\beta = \delta \wedge \beta_t$.

Soit $\bar{x}$ le vecteur des variables qui apparaissent dans un membre gauche d'une équation de α_t (donc de β_t aussi) et soit X l'ensemble des variables de $\bar{x}$. Du fait que α et β soient des blocs résolus, alors $X \cap \mathit{var}(\delta) = \emptyset$. Soit γ la conjonction des contraintes de typage de α (donc de β aussi) qui concernent des variables qui appartiennent à $\bar{x}$. La formule γ est donc une sous-formule de δ. D'après la propriété 5.2.2.1, on a $T^*_{ad} \models \gamma \rightarrow \exists! \bar{x} \alpha_t$ et $T^*_{ad} \models \gamma \rightarrow \exists! \bar{x} \beta_t$. Donc $T^*_{ad} \models \delta \rightarrow \exists! \bar{x}\, \alpha_t$ et $T^*_{ad} \models \delta \rightarrow \exists! \bar{x}\, \beta_t$.

Sachant $T^*_{ad} \models \alpha \rightarrow \beta$, c'est-à-dire, $T^*_{ad} \models \forall \bar{y} \forall \bar{x}\, \delta \wedge \alpha_t \rightarrow \delta \wedge \beta_t$, avec $\bar{y}\bar{x}$ le vecteur des variables de $\alpha \wedge \beta$; alors les équivalences suivantes sont vraies dans T^*_{ad}

$$\begin{array}{lll} & \forall \bar{y} \forall \bar{x}\, \delta \wedge \alpha_t \rightarrow \delta \wedge \beta_t, & \\ \leftrightarrow & \forall \bar{y} \neg (\exists \bar{x}\, \delta \wedge \alpha_t \wedge \neg(\delta \wedge \beta_t)), & \\ \leftrightarrow & \forall \bar{y} \neg (\delta \wedge (\exists \bar{x}\, \alpha_t \wedge \neg \beta_t)), & \text{car } X \cap \mathit{var}(\delta) = \emptyset \\ \leftrightarrow & \forall \bar{y} \neg (\delta \wedge \neg(\exists \bar{x}\, \alpha_t \wedge \beta_t)) & \text{car } T^*_{ad} \models \delta \rightarrow \exists! \bar{x}\, \alpha_t \\ & & \text{ et du fait du corollaire 3.1.0.8 (chapitre 3),} \\ \leftrightarrow & \forall \bar{y} \neg (\delta \wedge \neg(\exists \bar{x}\, \beta_t \wedge \alpha_t)), & \\ \leftrightarrow & \forall \bar{y} \neg (\delta \wedge (\exists \bar{x}\, \beta_t \wedge \neg \alpha_t)), & \text{car } T^*_{ad} \models \delta \rightarrow \exists! \bar{x}\, \beta_t \\ & & \text{et du fait de l'implication inverse du corollaire 3.1.0.8,} \\ \leftrightarrow & \forall \bar{y} \neg (\exists \bar{x}\, \delta \wedge \beta_t \wedge \neg(\delta \wedge \alpha_t)), & \\ \leftrightarrow & \forall \bar{y} \forall \bar{x}\, \delta \wedge \beta_t \rightarrow \delta \wedge \alpha_t. & \end{array}$$

On a donc $T^*_{ad} \models (\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$. Du fait que $T^*_{ad} \models \alpha \rightarrow \beta$, on a $T^*_{ad} \models \alpha \leftrightarrow \beta$. □

5.2.3 Décomposition de blocs quantifiés dans T^*_{ad}

Soit ψ une formule. Soient $\bar{x}$ un vecteur de variables et α un bloc résolu tel que pour chaque variable quantifiée inaccessible u dans $\exists \bar{x} \alpha$ et chaque variable quantifiée accessible v dans $\exists \bar{x} \alpha$ on a $u \succ v$. On appelle *décomposition* de la formule $\exists \bar{x} \alpha \wedge \psi$ dans T^*_{ad}, la formule

$$\exists \bar{x}^1\, \alpha^1 \wedge (\exists \bar{x}^2\, \alpha^2 \wedge (\exists \bar{x}^3\, \alpha^3 \wedge \psi))), \tag{5.1}$$

obtenue comme suit : Soit X l'ensemble des variables de $\bar{x}$. On divise X en deux sous-ensembles disjoints X_{acc} (l'ensemble des éléments de X qui sont accessibles dans $\exists \bar{x} \alpha$) et X_{inacc}. Soit *Repr* l'ensemble des représentants des équations de α. On a :

– $\bar{x}^1$ est le vecteur des variables de X_{acc}.

– $\bar{x}^2$ est le vecteur des variables de $X_{inacc} - Repr$.
– $\bar{x}^3$ est le vecteur des variables de $X_{inacc} \cap Repr$.
– α^1 est de la forme $\alpha^1_1 \wedge \alpha^1_2$ où α^1_1 est la conjonction de toutes les équations dans $\exists \bar{x}\alpha$ dont le représentant est accessible, α^1_2 est la conjonction de toutes les contraintes de typage de α qui concernent des variables de $var(\alpha^1_1)$.
– α^2 est de la forme $\alpha^2_1 \wedge \alpha^2_2$ où α^2_1 est la conjonction de toutes les inéquations de α et α^2_2 est la conjonction de toutes les contraintes de typage de α qui ne concernent pas les variables de $\bar{x}^3$.
– α^3 est de la forme $\alpha^3_1 \wedge \alpha^3_2$ où α^3_1 est la conjonction des autres équations et α^3_2 est la conjonction des contraintes de typage de α qui concernent des variables de $var(\alpha^3_1)$.

Soit A l'ensemble de blocs résolus. Soit A^1 l'ensemble de formules de la forme $\exists \bar{x}^1 \alpha^1$, où α^1 est un bloc équationnel résolu et les variables de $\bar{x}^1$ sont toutes accessibles dans $\exists \bar{x}^1 \alpha^1$. Soit A^2 l'ensemble de blocs relationnels résolus.

Propriété 5.2.3.1 *Soit $\exists \bar{x}^1 \alpha^1$ une formule sans variables libres qui appartient à A^1. On a $\bar{x}^1 = \varepsilon$ et $\alpha^1 = vrai$.*

Preuve. Du fait que la formule $\exists \bar{x}^1 \alpha^1$ n'ait pas de variables libres, alors il n'existe pas de variables accessibles dans $\exists \bar{x}^1 \alpha^1$. Donc, d'après la définition de l'ensemble A^1 on a $\bar{x}^1 = \varepsilon$. La formule $\exists \bar{x}^1 \alpha^1$ est donc équivalente dans T^*_{ad} à la formule sans variables libres α^1. D'après, la définition de l'ensemble A^1, la formule α^1 est un bloc résolu. Du fait que ce dernier ne contienne pas de variables libres alors c'est la formule *vrai*. □

Dans le chapitre 4 nous avons montré que T^*_{ad} est zéro-infini-décomposable on a alors, par définition, les propriétés suivantes

Propriété 5.2.3.2 *Si $\exists \bar{x}^1 \alpha^1 \in A^1$ alors $T^*_{ad} \models \exists ? \bar{x}^1\, \alpha^1$ et pour toue variable libre y dans $\exists \bar{x}^1 \alpha^1$, une au moins des propriétés suivantes est satisfaite*
– $T^*_{ad} \models \exists ? y \bar{x}^1\, \alpha^1$,
– *il existe une formule $\psi(u) \in \Psi(u)$ telle que $T^*_{ad} \models \forall y\, (\exists \bar{x}^1\, \alpha^1) \rightarrow \psi(y)$,*

Propriété 5.2.3.3 *Si $\alpha^2 \in A^2$, alors pour tout x^2, $T^*_{ad} \models \exists^{\Psi(u)}_{o\,\infty} x^2\, \alpha^2$.*

Propriété 5.2.3.4 *Si $\alpha^2 \in A^2$, alors pour tout x^2, la formule $\exists x^2 \alpha^2$ est équivalente dans T^*_{ad} à une formule qui appartient à A^2.*

Propriété 5.2.3.5 *Pour toute formule décomposée de la forme (5.1) on a : $\exists \bar{x}^1 \alpha^1 \in A^1$, $\alpha^2 \in A^2$, $\alpha^3 \in A$ et $T^*_{ad} \models \forall \bar{x}^2\, \alpha^2 \rightarrow \exists ! \bar{x}^3 \alpha^3$.*

Preuve. Soit $\exists \bar{x}^1 \alpha^1 \wedge (\exists \bar{x}^2 \alpha^2 \wedge (\exists \bar{x}^3 \alpha^3 \wedge \phi))$ la formule décomposée de $\exists \bar{x} \alpha \wedge \phi$. D'après la construction des ensembles $\bar{x}^1$, $\bar{x}^2$, $\bar{x}^3$, α^1, α^2 et α^3 définis dans la définition 5.2.3, il est clair que $\exists \bar{x}^1 \alpha^1 \in A^1$ et $\alpha^2 \in A^2$. Montrons maintenant que $\forall \bar{x}^2 \alpha^2 \rightarrow \exists ! \bar{x}^3 \alpha^3$. Du fait que α^2 contienne les contraintes de typage de toutes les variables qui apparaissent dans α et n'apparaissent pas dans $\bar{x}^3$ et du fait que $\bar{x}^3$ contienne les représentants des équations de α^3, alors d'après la propriété 5.2.2.1 on a $T^*_{ad} \models \alpha^2 \rightarrow \exists ! \bar{x}^3 \alpha^3$, c'est-à-dire $\forall \bar{x}^2\, \alpha^2 \rightarrow \exists ! \bar{x}^3 \alpha^3$ □

Exemple 5.2.3.6 *Soient v, w, x, y, z des variables telles que $w \succ y \succ z \succ x \succ v$. Décomposons la formule suivante dans T^*_{ad}*

$$\begin{bmatrix} \exists wxyz \\ v = fvx \wedge w + 2.x + (-2).z = 1 \wedge y + 3.z = 0.1 \wedge \\ z < 1 \wedge 3.z + 2.x < 0.1 \wedge \\ arbre\, v \wedge num\, w \wedge num\, x \wedge num\, y \wedge num\, z \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

Les variables accessibles de cette formule sont v et x. On a donc $X_{acc} = \{v, x\}$, $X_{inacc} = \{w, y, z\}$ et Repr $= \{v, w, y\}$. Du fait que $w \succ y \succ z \succ x$, alors (5.2) est équivalente à la formule décomposée suivante

$$\begin{bmatrix} \exists x\, v = fvx \wedge arbre\, v \wedge num\, x \wedge \\ \begin{bmatrix} \exists z\, z < 1 \wedge 3.z + 2.x < 0.1 \wedge num\, z \wedge numx \wedge arbre\, v \wedge \\ \begin{bmatrix} \exists wy\, w{+}2.x{+}(-2).z{=}1 \wedge y{+}3.z{=}0.1 \wedge \\ num\, w \wedge num\, x \wedge num\, y \wedge num\, z) \end{bmatrix} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Remarquons que les éléments de A^1 n'acceptent pas d'élimination de quantificateurs, du fait que les variables de $\bar{x}^1$ soient accessibles dans $\exists \bar{x}^1\, \alpha^1$. En effet, dans la formule $\exists x\, v = fvx$ la quantification $\exists x$ ne peut être éliminée dans T^*_{ad}. Une propriété similaire a été montrée par M.J. Maher dans la théorie des arbres finis ou infinis [33].

Dans ce qui suit, nous utiliserons les notations $\bar{x}^1$, $\bar{x}^2$, $\bar{x}^3$, α^1, α^2,α^3 en référant à la décomposition de la formule $\exists \bar{x}\alpha$.

5.3 Résolution de contraintes du premier ordre dans T^*_{ad}

Nous allons maintenant définir en utilisant le concept de bloc, une structure de formule que manipulera notre algorithme de résolution tout au long de la résolution. Ce sont les formules de travail !

5.3.1 Formules de travail et formules résolues

Définition 5.3.1.1 *Une formule normalisée φ de profondeur $d \geq 1$ est une formule de la forme*

$$\neg(\exists \bar{x}\, \alpha \wedge \bigwedge_{i \in I} \varphi_i), \tag{5.3}$$

avec I un ensemble fini éventuellement vide, α une formule basique et les φ_i des formules normalisées de profondeur d_i et $d = 1 + \max\{0, d_1, ..., d_n\}$.

On a bien entendu la propriété suivante

Propriété 5.3.1.2 *Toute formule est équivalente dans T^*_{ad} à une formule normalisée.*

Définition 5.3.1.3 *Une formule de travail est une formule normalisée dont toutes les occurrences de $\neg$ sont remplacées par $\neg^k$ avec $k \in \{0, ..., 9\}$ et telle que chaque occurrence d'une sous-formule de la forme*

$$\phi = \neg^k(\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \bigwedge_{i \in I} \varphi_i), \tag{5.4}$$

ait $\alpha^p = vrai$ si $k = 0$ et **satisfasse aux k premières conditions** *de la liste suivante de conditions si $k > 0$. Ici α^p est un bloc résolu appelé section de contraintes propagées (propagated section), α^c est une formule basique appelée section de contraintes de noyaux (the core section), les φ_i sont des formules de travail, et dans les conditions : $\beta^p \wedge \beta^c$ est la conjonction des équations et relations de la sur-formule immédiate ψ de ϕ si elle existe, c'est-à-dire, $\psi = \neg^k(\exists \bar{y}\beta^c \wedge \beta^p \wedge \phi \wedge \bigwedge_{j \in J} \phi_j)$ avec les ϕ_j des formules de travail.*

1. *si ψ existe, alors $T^*_{ad} \models \alpha^p \wedge \alpha^c \rightarrow \beta^p \wedge \beta^c$, et les sections arborescentes de α^p et de $\beta^c \wedge \beta^p$ ont le même ensemble de membres gauches d'équations,*

2. *la section arborescente de* $\alpha^p \wedge \alpha^c$ *est formatée et la formule* $\alpha^p \wedge \alpha^c$ *ne contient pas de sous-formules de la forme* $arbre\, x \wedge num\, x$ *pour toute variable* x,
3. $\alpha^p \wedge \alpha^c$ *est un bloc,*
4. *la section numérique de* $\alpha^p \wedge \alpha^c$ *est consistante, et* $u \succ v$ *pour toute variable quantifiée inaccessible* u *dans* $\exists \bar{x}\, \alpha^p \wedge \alpha^c$ *et toute variable quantifiée accessible* v *dans* $\exists \bar{x} \alpha^p \wedge \alpha^c$,
5. $\alpha^p \wedge \alpha^c$ *est un bloc résolu,*
6. α^p *est la formule* $\beta^c \wedge \beta^p$ *si* ψ *existe, et la formule vrai sinon. La formule* α^c *est un bloc résolu et pour chaque relation* $num\, x$ *(ou* $arbre\, x$*) dans* α^p, *si* x *n'apparaît pas dans une équation ou une inéquation de* α^c *alors* $num\, x$ *(resp.* $arbre\, x$*) n'apparaît pas dans* α^c,
7. $(\exists \bar{x}\, \alpha^c)$ *est décomposable dans* T^*_{ad} *en* $(\exists \bar{x}^1\, \alpha^{c1} \wedge (\exists \bar{x}^2\, \alpha^{c2} \wedge (\exists \varepsilon\ vrai)))$,
8. $(\exists \bar{x}\, \alpha^c)$ *est décomposable dans* T^*_{ad} *en* $(\exists \bar{x}^1\, \alpha^{c1} \wedge (\exists \varepsilon\, \alpha^{c2} \wedge (\exists \varepsilon\ vrai)))$,
9. $(\exists \bar{x}\, \alpha^c)$ *est décomposable dans* T^*_{ad} *en* $(\exists \bar{x}^1\, \alpha^{c1} \wedge (\exists \varepsilon\ vrai \wedge (\exists \varepsilon\ vrai)))$.

Cette définition peut paraître ambiguë et complexe dans un premier temps, mais elle ne fait qu'exprimer notre souhait de contrôler le déroulement et l'exécution des règles de réécriture sur les formules de travail en intégrant des numérotations au dessus des symboles de négation et en affectant à chaque numéro un sens syntaxique et sémantique.

On appelle formule de travail *initiale* une formule de travail de la forme

$$\neg^6(\exists \varepsilon\ vrai \wedge \bigwedge_{i \in I} \varphi_i),$$

avec les φ_i des formules de travail dans lesquelles : tous les symboles de négation sont de la forme $\neg^0$ et toutes les sections de contraintes propagées sont réduites à la formule *vrai*. On appelle formule de travail *finale* une formule de travail de la forme

$$\neg^7(\exists \varepsilon\ vrai \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg^8(\exists \bar{x}_i\, \alpha_i^c \wedge \alpha_i^p \wedge \bigwedge_{j \in J_i} \neg^9(\exists \bar{y}_{ij}\, \beta_{ij}^c \wedge \beta_{ij}^p))), \tag{5.5}$$

où les β_{ij}^c sont différents de *vrai*.

Définition 5.3.1.4 *Une* formule générale résolue *est une formule de la forme*

$$\exists \bar{x}^1\, \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \bigwedge_{i \in I} \neg(\exists \bar{y}_i^1\, \beta_i^1), \tag{5.6}$$

où $\exists \bar{x}^1\, \alpha^1 \in A^1$, $\alpha^2 \in A^2$, $\exists \bar{y}_i^1\, \beta_i^1 \in A^1$, *tous les* $\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \beta_i^1$ *sont des blocs résolus et tous les* β_i^1 *sont différents de vrai.*

D'après les propriétés de $\neg^8$ et $\neg^9$, dans la formule de travail finale (5.5), $\alpha_i^p = vrai$ et $\beta_{ij}^p = \alpha_i^p \wedge \alpha_i^c$. Donc cette formule est équivalente dans T^*_{ad} à la disjonction de formules résolues générales

$$\bigvee_{i \in I} (\exists \bar{x}_i\, \alpha_i^c \wedge \bigwedge_{j \in J_i} \neg(\exists \bar{y}_{ij}\, \beta_{ij}^c)) \tag{5.7}$$

On a donc la propriété suivante

Propriété 5.3.1.5 *Toute formule de travail finale de la forme (5.5) est équivalente dans* T^*_{ad} *à la disjonction (5.7) de formules résolues générales.*

Propriété 5.3.1.6 *Soit φ une formule de travail de la forme*

$$\neg^k(\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \bigwedge_{i\in I} \phi_i)$$

avec $6 \leq k \leq 9$ et les ϕ_i des formules de travail. On a

$$T \models \neg(\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \bigwedge_{i\in I} \phi_i^*) \leftrightarrow \neg(\alpha^p \wedge (\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \bigwedge_{i\in I} \phi_i^*)),$$

avec ϕ_i^* la formule normalisée obtenue à partir de ϕ_i en remplaçant chaque $\neg^k$ par $\neg$.

Preuve Soit ψ (s'il existe) la sur-formule immédiate de la formule de travail φ. Elle est donc de la forme

$$\neg^k(\exists \bar{y}\beta^c \wedge \beta^p \wedge \varphi \wedge \bigwedge_{j\in J} \phi'_j),$$

avec ϕ'_j des formules de travail. D'après la définition 5.3.1.3, du fait que $k \geq 6$ alors la formule normalisée satisfait aux k premières conditions de cette définition. Deux cas sont alors à étudier

(1) Si ϕ n'existe pas alors α^p est la formule *vrai*, d'après la sixième condition de la définition 5.3.1.3. Par conséquent, cette propriété est vraie dans T^*_{ad}.

(2) Si ϕ existe, alors $\alpha^p = \beta^p \wedge \beta^c$ d'après la sixième condition de la définition 5.3.1.3. Du fait que les variables de $\bar{x}$ n'apparaissent pas dans $\beta^c \wedge \beta^p$, alors ces variables n'apparaissent pas dans α^p. Donc, nous pouvons remonter les quantificateurs de la formule α^p et les mettre avant la quantification $\exists \bar{x}$. Cette propriété est donc vraie dans T^*_{ad}. □

Nous allons maintenant présenter certainement une des propriétés les plus importantes de ce chapitre et qui montre toute la différence entre décision de propositions et résolution de contraintes du premier ordre dans T^*_{ad}.

Propriété 5.3.1.7 *Soit φ une formule générale résolue de la forme (5.6). Si φ n'a pas de variables libres, alors φ est la formule vrai, sinon on n'a ni $T^*_{ad} \models \varphi$, ni $T^*_{ad} \models \neg\varphi$.*

Preuve. Soit φ une formule générale résolue de la forme

$$\exists \bar{x}^1\, \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{y}_i^1\, \beta_i^1), \tag{5.8}$$

avec $\exists \bar{x}^1\, \alpha^1 \in A^1$, $\alpha^2 \in A^2$, $\exists \bar{y}_i^1\, \beta_i^1 \in A^1$, tous les $\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \beta_i^1$ sont des blocs résolus et tous les β_i^1 sont différents de la formule *vrai*. Deux cas sont à étudier

Cas 1 : Montrons que si φ n'a pas de variables libres alors φ est la formule *vrai*. Du fait que φ n'ait pas de variables libres alors la formule $\exists \bar{x}^1\, \alpha^1 \wedge \alpha^2$ n'a pas de variables libres. Du fait que $\exists \bar{x}^1\, \alpha^1 \in A^1$ et qu'elle n'ait pas de variables libres alors d'après la propriété 5.2.3.1, la formule (5.8) est équivalente dans T^*_{ad} à la formule svls suivante

$$\alpha^2 \wedge \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{y}_i^1\, \beta_i^1). \tag{5.9}$$

Du fait que $\alpha^2 \in A^2$ et α^2 n'aient pas de variables libres alors, d'après la définition de l'ensemble A^2, on a $\alpha^2 = vrai$. La formule précédente est donc équivalente dans T^*_{ad} à la formule svls suivante

$$\bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{y}_i^1\, \beta_i^1). \tag{5.10}$$

Du fait que $\exists \bar{y}^1_i \, \beta^1_i \in A^1$ et qu'elle ne contienne pas de variables libres, alors d'après la propriété 5.2.3.1, on a $\exists \bar{y}^1_i \beta^1_i = \exists \varepsilon \, vrai$. Mais, d'après les conditions de la formule (5.8), tous les β^1_i sont différents de la formule *vrai*. Par conséquent, I est l'ensemble vide. La formule précédente est donc équivalente dans T^*_{ad} à la formule *vrai*.

Cas 2 : Si φ a au moins une variable libre, alors montrons qu'il existe au moins un modèle M de T^*_{ad} et deux instanciations distinctes φ' et φ'' de φ telles que

$$M \models \neg\varphi' \quad et \quad M \models \varphi''.$$

Prenons alors pour M le modèle standard de T^*_{ad} défini dans le chapitre 4.[27]

(1) Montrons que φ' existe. Soit z une variable libre de φ :

– Si z apparaît dans la formule $\alpha^1 \wedge \alpha^2$, alors du fait que $\exists \bar{x}^1 \, \alpha^1 \in A^1$ et $\alpha^2 \in A^2$, les formules α^1 et α^2 sont des blocs résolus. Donc, toutes les variables sont typées et par conséquent $num\, z$ ou $\neg num\, z$ est une sous-formule de $\alpha^1 \wedge \alpha^2$. Afin de mettre à faux φ', il suffit d'instancier la variable libre z par un élément de Q si $\neg num\, z$ est une sous-formule de $\alpha^1 \wedge \alpha^2$; et par $f1$, avec f un symbole de fonction unaire, si $num\, z$ est une sous-formule de $\alpha^1 \wedge \alpha^2$. On obtient alors une contradiction de typage et par conséquent $M \models \neg\varphi'$.
– Sinon, il existe $k \in I$ tel que la formule $\exists \bar{y}^1_k \, \beta^1_k$ avec $k \in I$, ait au moins une variable libre. Du fait que $\exists \bar{y}^1_k \, \beta^1_k \in A^1$, alors β^1_k est un bloc résolu, et donc d'après la propriété 5.2.1.2, il existe une instanciation $\exists \bar{y}^1_k \, \beta'^1_k$ des variables libres de $\exists \bar{y}^1_k \, \beta^1_k$ telle que $M \models \exists \bar{y}^1_k \, \beta'^1_k$, donc $M \models \neg(\exists \bar{x}^1 \, \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{y}^1_i \, \beta^1_i))$, et par conséquent $M \models \neg\varphi'$.

(2) Montrons maintenant que φ'' existe. La formule φ est de la forme

$$\exists \bar{x}^1 \, \alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{y}^1_i \, \beta^1_i), \tag{5.11}$$

avec $\exists \bar{x}^1 \, \alpha^1 \in A^1$, $\alpha^2 \in A^2$, $\exists \bar{y}^1_i \, \beta^1_i \in A^1$, tous les $\alpha^1 \wedge \alpha^2 \wedge \beta^1_i$ sont des blocs résolus et tous les β^1_i sont différents de la formule *vrai*. Soit α^{2*} la formule α^2 dans laquelle nous avons supprimé les contraintes de typage qui concernent les représentants des équations de α^1. Transformons, en utilisant la propriété 5.1.1.1, les équations de la section numérique de α^1 et β^1_i, en mettant à gauche les termes de la forme $a_k.x_k$ avec x_k le représentant de l'équation transformée. La formule précédente est donc équivalente dans T^*_{ad} à

$$\exists \bar{x}^1 \, \alpha^1 \wedge \alpha^{2*} \wedge \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{y}^1_i \, \beta^1_i), \tag{5.12}$$

où les équations de la section numérique de α^1 (respectivement β^1_i) ont des membres gauches distincts qui n'apparaissent pas dans d'autres équations de la section numérique de α^1 (respectivement β^1_i). Du fait que $\exists \bar{y}^1_i \, \beta^1_i \in A^1$, alors β^1_i est un bloc résolu, consistant et différent de la formule *faux*. De plus, du fait que tous les β^1_i soient différents de la formule *vrai*, et que toutes les variables de $\bar{y}^1_i$ soient accessibles dans $\exists \bar{y}^1_i \, \beta^1_i$, alors il existe au moins une variable libre dans chaque β^1_i. Du fait que $\alpha^1 \wedge \alpha^{2*} \wedge \beta^1_i$ soit un bloc résolu, alors il est consistant. Par conséquent, il existe une instanciation de $\exists \bar{x}^1 \, \alpha^1 \wedge \alpha^{2*}$ qui satisfait cette M-formule dans M (propriété 5.2.1.2) et donc d'après la propriété 5.2.3.3, il existe une infinité d'instanciations des variables de α^{2*} qui satisfont cette M-formule dans M. Pour chacune de ces instanciations et pour chaque instanciation des membres droits des équations de la section numérique de α^1, il existe une valeur pour les représentants de ces équations (axiome 13_n). D'autre part, pour toute instanciation des variables

[27] Ce modèle a pour domaine l'ensemble des arbres finis ou infinis étiquetés par $Q \cup F$ et tels que chaque sous-arbre étiqueté par $Q \cup \{+, -\}$ est évalué dans Q et réduit à une feuille étiquetée par Q.

des équations arborescentes de α^1 qui ne sont pas des représentants, il existe une valeur unique pour les représentants de ces équations (axiome 3). Il existe alors une infinité d'instanciations des variables libres de $\exists \bar{x}^1\, \alpha^1 \wedge \alpha^2$ qui satisfont cette M-formule. Montrons maintenant que parmi ces instanciations, il en existe une qui met à faux toutes les $\exists \bar{y}^1_i \beta^1_i$ dans M et donc qui met à *vrai* la M-formule φ'' dans M. Dans chaque sous-formule de la forme $\exists \bar{y}^1_i \beta^1_i$, les représentants des équations de la section numérique de β^1_i n'apparaissent pas dans les inéquations de $\alpha^1 \wedge \alpha^2$. Du fait que pour toute instanciation des membres droits des équations de la section numérique de β^1_i, il existe une valeur pour les représentants. Donc, il suffit de choisir une valeur différente qui met à faux tous les $\exists \bar{y}^1_i \beta^1_i$. Ce choix est possible car le domaine de M est infini. Pour toute instanciation des variables qui ne sont pas des représentants dans les équations de la section arborescente de β^1_i, il existe une valeur unique pour les représentants, donc il suffit de choisir une autre valeur qui met à faux tous les $\exists \bar{y}^1_i \beta^1_i$. Ce choix est toujours possible car le domaine est infini. On a montré alors qu'il existe toujours une instanciation qui met à *vrai* la formule $\exists \bar{x}^1 \alpha^1 \wedge \alpha^2$ et à *faux* chaque sous-formule de la forme $\exists \bar{y}^1_i \beta^1_i$. C'est donc la formule φ'' recherchée.

Propriété 5.3.1.8 *Toute formule générale résolue est équivalente dans T^*_{ad} à une combinaison booléenne de formules de la forme $\exists \bar{x}^1 \alpha^1 \wedge \alpha^2$, avec $\exists \bar{x}^1 \alpha^1 \in A^1$ et $\alpha^2 \in A^2$, chacune n'acceptant pas d'élimination de quantificateurs.*

Preuve. Soit la formule générale résolue suivante

$$\bigvee_{i \in I} (\exists \bar{x}_i \alpha^c_i \wedge \bigwedge_{j \in J_i} \neg(\exists \bar{y}_{ij} \beta^c_{ij})), \tag{5.13}$$

où les β^c_{ij} sont différents de la formule *vrai*. Cette formule est extraite de la formule de travail finale suivante

$$\neg^7(\exists \epsilon\, vrai \bigwedge_{i \in I} \neg^8(\exists \bar{x}_i \alpha^c_i \wedge \alpha^p_i \wedge \bigwedge_{j \in J_i} \neg^9(\exists \bar{y}_{ij} \beta^c_{ij} \wedge \beta^p_{ij}))).$$

D'après les conditions de $\neg^8$, on a $\alpha^p_i = vrai$ et toutes les variables de $\bar{x}_i$ sont accessibles dans $\exists \bar{x}_i \alpha^c_i$. On sait également que la formule $\exists \bar{x}_i \alpha^c_i$ est décomposable dans T^*_{ad} en $\exists \bar{x}_i \alpha^{c1}_i \wedge \alpha^{c2}_i$, avec $\exists \bar{x}_i \alpha^{c1}_i \in A^1$ et $\alpha^{c2}_i \in A^2$.

D'après les conditions de $\neg^9$, on a $\beta^p_{ij} = \alpha^c_i \wedge \alpha^p_i = \alpha^c_i$, $\beta^c_{ij} \wedge \beta^p_{ij}$ est un bloc résolu et $\exists \bar{y}_{ij} \beta^c_{ij}$ est un élément de A^1. On déduit alors que $\beta^c_{ij} \wedge \alpha^c_i$ sont des blocs résolus. Du fait que chaque variable dans $\bar{x}_i$ soit accessible dans $\exists \bar{x}_i \alpha^c_i$, alors ces variables restent accessibles dans $\exists \bar{x}_i \bar{y}_{ij} \alpha^c_i \wedge \beta^c_{ij}$. Du fait que chaque variable y dans $\bar{y}_{ij}$ soit accessible dans $\exists \bar{y}_{ij} \beta^c_{ij}$, alors deux cas sont à étudier

(1) y est accessible et n'est pas influencé par les variables de $\bar{x}_i$. Donc y est accessible dans $\exists \bar{x}_i \bar{y}_{ij} \alpha^c_i \wedge \beta^c_{ij}$.

(2) y est accessible et est influençable par les variables de $\bar{x}_i$. Donc, du fait que toutes les variables de $\bar{x}_i$ soient accessibles dans $\exists \bar{x}_i \bar{y}_{ij} \alpha^c_i \wedge \beta^c_{ij}$, la variable y reste accessible dans $\exists \bar{x}_i \bar{y}_{ij} \alpha^c_i \wedge \beta^c_{ij}$.

Par conséquent, les formules $\exists \bar{x}_i \bar{y}_{ij} \alpha^c_i \wedge \beta^c_{ij}$ peuvent être décomposées en $\exists \bar{x}_i \bar{y}_{ij} \alpha^{c1}_i \wedge \beta^c_{ij} \wedge \alpha^{c2}_i$, avec $\exists \bar{x}_i \bar{y}_{ij} \alpha^{c1}_i \wedge \beta^c_{ij} \in A^1$ et $\alpha^{c2}_i \in A^2$.

D'après la propriété 5.2.1.1, la formule (5.13) est équivalente dans T^*_{ad} à la formule

$$\bigvee_{i \in I} ((\exists \bar{x}_i \alpha^c_i) \wedge \bigwedge_{j \in J_i} \neg(\exists \bar{x}_i \bar{y}_{ij} \alpha^c_i \wedge \beta^c_{ij})).$$

D'après le point précédent, nous avons montré que chaque conjonction quantifiée est de la forme $\exists \bar{x}^1 \alpha^1 \wedge \alpha^2$ avec $\bar{x}^1 \alpha^1 \in A^1$ et $\alpha^2 \in A^2$. $\square$

5.3.2 Idée principale

L'algorithme de résolution de contraintes du premier ordre dans T^*_{ad} utilise un système de 28 règles de réécriture. L'idée principale est de transformer une formule de travail initiale de profondeur d en une formule de travail finale de profondeur inférieure ou égale à 3. La transformation est effectuée en 2 étapes

1. La première étape est un parcours descendant sur la structure de la formule de travail avec simplification et propagation de contraintes. Dans chaque sous-formule de travail, la formule $\alpha^c \wedge \alpha^p$ est transformée en un bloc résolu, puis la formule $\exists \bar{x} \alpha^c$ est décomposée en 3 parties (voir la sous-section 5.2.3). La troisième partie est éliminée et ajoutée à la section de contraintes de noyaux des sous-formules de travail immédiates, en utilisant une propriété du quantificateur $\exists!$. Les contraintes des deux autres parties sont propagées dans la section de contraintes propagées des sous-formules de travail immédiates. A cette étape, les règles 1 à 24 sont appliquées et transforment la formule de travail initiale en une formule de travail dont tout symbole de négation est de la forme $\neg^7$.
2. La seconde étape est un parcours ascendant sur la structure de la formule de travail avec élimination de quantificateurs et réduction de la profondeur de la formule de travail par distribution. Cette étape est effectuée par les règles 25 à 28. Dans chaque sous-formule de travail de profondeur 1 ou 2, la règle 25 élimine les variables quantifiées de la seconde partie de la décomposition (la troisième partie étant éliminée dans la première étape). La règle 26 élimine les contraintes de la seconde partie dans les niveaux les plus profonds. Chaque sous-formule de travail de profondeur 3 est transformée au fur et à mesure en une conjonction de formules de travail de profondeur 2 par la règle 28, en utilisant une propriété du quantificateur $\exists ?$. Les transformations de cette étape peuvent créer des nouvelles sous-formules de travail où la première étape nécessite d'être effectuée. A la fin des transformations, on obtient une formule de travail finale de profondeur inférieure ou égale à 3.

5.3.3 Règles de réécriture

Nous présentons maintenant les règles de réécriture qui transforment une formule de travail initiale en une formule de travail finale équivalente dans T^*_{ad}. L'application d'une règle $p_1 \Longrightarrow p_2$ sur une formule de travail p consiste à remplacer dans p une sous-formule p_1 par la formule p_2, en considérant que le connecteur $\wedge$ est associatif et commutatif.

$$
\begin{array}{lll}
1 & \neg^1(\exists \bar{u}\, \mathit{num}\, x \wedge \mathit{arbre}\, x \wedge \alpha \wedge \varphi) & \Longrightarrow \quad \mathit{vrai} \\
2 & \neg^1(\exists \bar{u}\, x = f\bar{y} \wedge x = g\bar{z} \wedge \mathit{arbre}\, x \wedge \alpha \wedge \varphi) & \Longrightarrow \quad \mathit{vrai} \\
3 & \neg^1(\exists \bar{u}\, x = x \wedge \alpha \wedge \varphi) & \Longrightarrow \quad \neg^1(\exists \bar{u}\, \alpha \wedge \varphi) \\
4 & \neg^1(\exists \bar{u}\, y = x \wedge \mathit{arbre}\, x \wedge \alpha \wedge \varphi) & \Longrightarrow \quad \neg^1(\exists \bar{u}\, x = y \wedge \mathit{arbre}\, x \wedge \alpha \wedge \varphi) \\
5 & \neg^1\left[\begin{array}{l} \exists \bar{u}\, x = fy_1...y_n \wedge x = fz_1...z_n \wedge \\ \mathit{arbre}\, x \wedge \alpha \wedge \varphi \end{array}\right] & \Longrightarrow \quad \neg^1\left[\begin{array}{l} \exists \bar{u}\, x = fy_1...y_n \wedge \bigwedge_i y_i = z_i \wedge \\ \mathit{arbre}\, x \wedge \alpha \wedge \varphi \end{array}\right] \\
6 & \neg^1\left[\begin{array}{l} \exists \bar{u}\, x = y \wedge x = fz_1...z_n \wedge \\ \mathit{arbre}\, x \wedge \mathit{arbre}\, y \wedge \alpha \wedge \varphi \end{array}\right] & \Longrightarrow \quad \neg^1\left[\begin{array}{l} \exists \bar{u}\, x = y \wedge y = fz_1...z_n \wedge \\ \mathit{arbre}\, x \wedge \mathit{arbre}\, y \wedge \alpha \wedge \varphi \end{array}\right] \\
7 & \neg^1(\exists \bar{u}\, x = y \wedge x = z \wedge \mathit{arbre}\, x \wedge \alpha \wedge \varphi) & \Longrightarrow \quad \neg^1(\exists \bar{u}\, x = y \wedge y = z \wedge \mathit{arbre}\, x \wedge \alpha \wedge \varphi) \\
8 & \neg^4(\exists \bar{u}\, 0 = 0.1 \wedge \alpha \wedge \varphi) & \Longrightarrow \quad \neg^4(\exists \bar{u}\, \alpha \wedge \varphi) \\
9 & \neg^4(\exists \bar{u}\, 0 < a_0.1 \wedge \alpha \wedge \varphi) & \Longrightarrow \quad \neg^4(\exists \bar{u}\, \alpha \wedge \varphi) \\
10 & \neg^4\left[\begin{array}{l} \exists \bar{u}\, x = y \wedge \\ \mathit{num}\, x \wedge \mathit{num}\, y \wedge \alpha \wedge \varphi \end{array}\right] & \Longrightarrow \quad \neg^4\left[\begin{array}{l} \exists \bar{u}\, x + (-1).y = 0.1 \wedge \\ \mathit{num}\, x \wedge \mathit{num}\, y \wedge \alpha \wedge \varphi \end{array}\right]
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
11 \quad \neg^4 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{u}\, x = -y \wedge \\ num\, x \wedge num\, y \wedge \alpha \wedge \varphi \end{array} \right] & \Longrightarrow & \neg^4 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{u}\, x + y = 0.1 \wedge \\ num\, x \wedge num\, y \wedge \alpha \wedge \varphi \end{array} \right] \\
12 \quad \neg^4 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{u}\, x = y + z \wedge num\, x \wedge \\ num\, y \wedge num\, z \wedge \alpha \wedge \varphi \end{array} \right] & \Longrightarrow & \neg^4 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{u}\, x + (-1).y + (-1).z = 0.1 \wedge \\ num\, x \wedge num\, y \wedge num\, z \wedge \alpha \wedge \varphi \end{array} \right] \\
13 \quad \neg^4 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{u}\, \Sigma_{i=1}^n a_i.x_i = a_0.1 \wedge \\ \Sigma_{j=1}^n b_j.x_j = b_0.1 \wedge \\ \bigwedge num\, x \wedge \alpha \wedge \varphi \end{array} \right] & \Longrightarrow & \neg^4 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{u}\, \Sigma_{i=1}^n a_i.x_i = a_0.1 \wedge \\ \Sigma_{i=1}^n (b_k a_i - a_k b_i).x_i = (b_k a_0 - a_k b_0).1 \wedge \\ \bigwedge num\, x \wedge \alpha \wedge \varphi \end{array} \right] \\
14 \quad \neg^4 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{u}\, \Sigma_{i=1}^n a_i.x_i = a_0.1 \wedge \\ \Sigma_{j=1}^n b_j.x_j < b_0.1 \wedge \\ \bigwedge num\, x \wedge \alpha \wedge \varphi \end{array} \right] & \Longrightarrow & \neg^4 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{u}\, \Sigma_{i=1}^n a_i.x_i = a_0.1 \wedge \\ \Sigma_{i=1}^n \lambda(b_k a_i - a_k b_i).x_i < (b_k a_0 - a_k b_0).1 \wedge \\ \bigwedge num\, x \wedge \alpha \wedge \varphi \end{array} \right] \\
15 \quad \neg^1 (\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi) & \Longrightarrow & \neg^2 (\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi) \\
16 \quad \neg^2 (\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi) & \Longrightarrow & \neg^1 (\exists \bar{x}\, num\, z \wedge \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi) \\
17 \quad \neg^2 (\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi) & \Longrightarrow & \neg^1 (\exists \bar{x}\, arbre\, z \wedge \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi) \\
18 \quad \neg^2 (\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi) & \Longrightarrow & \left[\begin{array}{l} \neg^1 (\exists \bar{x}\, num\, z \wedge \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi) \wedge \\ \neg^1 (\exists \bar{x}\, arbre\, z \wedge \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi) \end{array} \right] \\
19 \quad \neg^2 (\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi) & \Longrightarrow & \neg^3 (\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi) \\
20 \quad \neg^3 (\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi) & \Longrightarrow & vrai \\
21 \quad \neg^3 (\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi) & \Longrightarrow & \neg^4 (\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi) \\
22 \quad \neg^4 (\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi) & \Longrightarrow & \neg^5 (\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi) \\
23 \quad \neg^7 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \\ \neg^5 (\exists \bar{y}\, \beta^c \wedge \beta^p \wedge \psi) \end{array} \right] & \Longrightarrow & \neg^7 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \\ \neg^6 (\exists \bar{y}\, \gamma^c \wedge \gamma^p \wedge \psi) \end{array} \right] \\
24 \quad \neg^6 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \\ \bigwedge_i \neg^0 (\exists \bar{y}_i \beta_i^c \wedge \beta_i^p \wedge \varphi_i) \end{array} \right] & \Longrightarrow & \neg^7 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{x}^1 \bar{x}^2\, \alpha^{c1} \wedge \alpha^{c2} \wedge \alpha^p \wedge \\ \bigwedge_i \neg^1 (\exists \bar{y}_i \bar{x}^3 \gamma_i^c \wedge \gamma_i^p \wedge \varphi_i) \end{array} \right] \\
25 \quad \neg^7 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \\ \bigwedge_{i \in I} \neg^9 (\exists \bar{y}_i \beta_i^c \wedge \beta_i^p) \end{array} \right] & \Longrightarrow & \neg^8 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{x}^1 \alpha^{c1} \wedge \alpha^{c2*} \wedge \alpha^p \wedge \\ \bigwedge_{i \in I'} \neg^9 (\exists \bar{y}_i \beta_i^c \wedge \beta_i^{p*}) \end{array} \right] \\
26 \quad \neg^7 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \\ \neg^8 (\exists \bar{y} \beta^c \wedge \beta^p) \end{array} \right] & \Longrightarrow & \left[\begin{array}{l} \neg^7 (\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \neg^9 (\exists \bar{y} \beta^{c1} \wedge \beta^p)) \wedge \\ \bigwedge_{i \in I} \neg^1 (\exists \bar{x} \bar{y} \beta^p \wedge \beta^{c1} \wedge \beta_i^{c2*} \wedge \varphi_0) \end{array} \right] \\
27 \quad \neg^7 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \\ \neg^9 (\exists \varepsilon\, vrai \wedge \beta^p) \end{array} \right] & \Longrightarrow & vrai \\
28 \quad \neg^7 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \\ \neg^8 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{y}\, \beta^c \wedge \beta^p \wedge \\ \bigwedge\limits_{i \in I} \neg^9 (\exists \bar{z}_i\, \gamma_i^c \wedge \gamma_i^p) \end{array} \right] \end{array} \right] & \Longrightarrow & \left[\begin{array}{l} \neg^7 (\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \neg^8 (\exists \bar{y}\, \beta^c \wedge \beta^p)) \wedge \\ \bigwedge\limits_{i \in I} \neg^6 (\exists \bar{x} \bar{y} \bar{z}_i\, \delta_i^c \wedge \delta_i^p \wedge \varphi_0) \end{array} \right]
\end{array}
$$

Dans toutes ces règles, α représente une formule basique, φ et ψ des conjonctions de formules de travail.

Dans les règles 1 à 14, les équations et relations dans α^c et α^p sont mélangées en considérant le connecteur $\wedge$ associatif et commutatif. Dans ces règles, sauf dans la règle 6, toutes les modifications sont effectuées dans α^c, car α^p est un bloc résolu.

Dans la règle 2, f et g sont deux symboles de fonction distincts de F. Dans les règles 4, 6, 7, $x \succ y$. Dans la règle 5, l'équation $x = fz_1...z_n$ n'est pas dans α^p. Dans la règle 6, si l'équation $x = fz_1...z_n$ est dans α^p alors l'équation $x = y \wedge arbre\, y$ obtenue par cette règle est déplacée vers α^p. Dans la règle 7, l'équation $x = z$ n'est pas dans α^p.

Dans la règle 9, $a_0 > 0$. Dans les règles 13 et 14, la variable x_k est le représentant de l'équation $\Sigma_i a_i.x_i = a_0.1$ et $b_k \neq 0$. De plus, l'équation $\Sigma_j b_j x_j = b_0.1$ n'est pas dans α^p. Dans la règle 14, l'inéquation $\Sigma_j b_j.x_j < b_0.1$ n'est pas dans α^p et $\lambda = 1$ si $a_k > 0$ et $\lambda = -1$ sinon.

Dans la règle 15, la section arborescente de $\alpha^c \wedge \alpha^p$ est formatée et $\alpha^c \wedge \alpha^p$ n'a pas de sous-formules de la forme $\mathit{num}\, x \wedge \mathit{arbre}\, x$. Dans les règles 16 respectivement 17, la contrainte de typage $\mathit{num}\, z$, respectivement $\mathit{arbre}\, z$ n'est pas dans $\alpha^c \wedge \alpha^p$ et est une conséquence de $\alpha^c \wedge \alpha^p$. Dans la règle 18, z n'a pas de contraintes de typage dans $\alpha^c \wedge \alpha^p$ et aucune contrainte de typage sur z n'est conséquence de cette formule.

Dans la règle 19, $\alpha^c \wedge \alpha^p$ est un bloc. Dans la règle 20, la section numérique de $\alpha^c \wedge \alpha^p$ est inconsistante. Dans la règle 21, les variables inaccessibles de $\bar{x}$ sont renommées si nécessaire de telle façon que $u \succ v$ pour chaque variable inaccessible u et chaque variable accessible v de $\bar{x}$. De plus, la section numérique de $\alpha^c \wedge \alpha^p$ est consistante. La consistance est vérifiée en utilisant la première phase du Simplex. Dans la règle 22, $\alpha^c \wedge \alpha^p$ est un bloc résolu.

Dans la règle 23, la formule γ^c est obtenue à partir de β^c comme suit. Pour chaque variable $x \in \mathit{var}(\beta^c)$, on ajoute toutes les relations $\mathit{num}\, x$ ou $\mathit{arbre}\, x$ qui sont dans β^p mais pas dans β^c, et pour toute variable y qui n'apparaît pas dans une équation ou une inéquation de β^c, on supprime de β^p toutes les relations $\mathit{num}\, y$ ou $\mathit{arbre}\, y$ qui sont à la fois dans β^c et β^p. La formule γ^p est la formule $\alpha^p \wedge \alpha^c$.

Dans la règle 24, la formule $\exists\bar{x}\alpha^c$ est décomposée en $\exists\bar{x}^1\alpha^{c1}\wedge(\exists\bar{x}^2\alpha^{c2}\wedge(\exists\bar{x}^3\alpha^{c3}))$, $\gamma_i^c = \beta_i^c \wedge \alpha^{c3}$ et $\gamma_i^p = \beta_i^p \wedge \alpha^{c1} \wedge \alpha^{c2} \wedge \alpha^p$.

Les quatre règles 25, 26, 27 et 28 ne peuvent pas s'appliquer sur le premier symbole $\neg^7$ de la formule de travail (le symbole du premier niveau). Dans la règle 25, I' est l'ensemble des $i \in I$ tels que β_i^c ne contienne pas d'occurrences de variables de $\bar{x}^2$. La formule α^{c2*} est telle que $T^*_{ad} \models (\exists\bar{x}^2\alpha^{c2}) \leftrightarrow \alpha^{c2*}$ et est calculée en utilisant l'élimination de quantificateurs de Fourier. La section de contraintes propagées β_i^{p*} est $= \alpha^{c1} \wedge \alpha^{c2*} \wedge \alpha^p$.

Dans la règle 26, la formule φ est telle que $k \geq 6$ pour tout symbole de négation $\neg^k$, la formule φ_0 est obtenue à partir de φ en remplaçant toute occurrence de $\neg^k$ par $\neg^0$ et toute section de contraintes propagées par la formule *vrai*. Soit β^2 la formule obtenue de β^{c2} en supprimant de β^{c2} les occurrences multiples des contraintes de typage, et toutes les relations $\mathit{num}\, y$ ou $\mathit{arbre}\, y$ qui sont à la fois dans β^{c1} et dans β^{c2} pour toute variable y n'apparaissant pas dans une inéquation de β^{c2}. Si β^2 est la formule *vrai* alors $I = \emptyset$, sinon les formules β_i^{c2*} avec $i \in I$ sont obtenues de β^2 comme suit : du fait que $\beta^2 \in A^2$, alors β^2 est de la forme

$$\begin{bmatrix}(\bigwedge_{\ell\in L} \mathit{num}\, z_\ell) \wedge (\bigwedge_{k\in K} \mathit{arbre}\, v_k)\wedge \\ ((\bigwedge_{j\in J} \sum_{i=1}^n a_{ij}.x_i < a_{0j}.1) \wedge \bigwedge_{m=1}^n \mathit{num}\, x_m)\end{bmatrix},$$

donc $\neg\beta^2$ est de la forme

$$\begin{bmatrix}(\bigvee_{\ell\in L} \mathit{arbre}\ z_\ell) \vee (\bigvee_{k\in K} \mathit{num}\, v_k) \vee (\bigvee_{m=1}^n \mathit{arbre}\, x_m) \\ \bigvee_{j\in J}((\sum_{i=1}^n a_{ij}.x_i = a_{0j}.1 \wedge \bigwedge_{m=1}^n \mathit{num}\, x_m)\vee \\ (\sum_{i=1}^n(-a_{ij})x_i < (-a_{0j}).1 \wedge \bigwedge_{m=1}^n \mathit{num}\, x_m))\end{bmatrix}.$$

Chaque élément de cette disjonction représente une formule β_i^{c2*}. Bien entendu $T^*_{ad} \models (\neg\beta^2) \leftrightarrow \bigvee_i \beta_i^{c2*}$.

Dans la règle 28, $I \neq \emptyset$, la formule φ est telle que $k \geq 6$ pour tout symbole de négation $\neg^k$, la formule φ_0 est obtenue à partir de φ en remplaçant toute occurrence de $\neg^k$ par $\neg^0$ et toute section de contraintes propagées par *vrai*. De plus, $\delta_i^p = \alpha^p$, $\delta_i^c = \gamma_i^c \wedge \beta^c \wedge \alpha^c$.

Propriété 5.3.3.1 *Toute application répétée des règles de réécriture précédentes sur une formule de travail initiale se termine et produit une formule de travail finale svls équivalente dans* T^*_{ad}.

Preuve, première partie : Montrons que toute application répétée de ces règles sur une formule de travail initiale se termine. Notons d'abord que les règles 1...7 sont appliquées sur des sous-formules de travail commençant par le symbole $\neg^1$ sans jamais changer ce symbole. Le même phénomène est vrai pour les règles 8 ...14 qui sont appliquées sur des sous-formules de travail commençant par le symbole $\neg^4$. On va alors diviser cette preuve de terminaison en trois parties : (1) toute application des règles 1...7 sur une formule de travail commençant par $\neg^1$ se termine, (2) toute application répétée des règles 8...14 sur des sous-formules de travail commençant par $\neg^4$ termine, (3) sachant (1) et (2) alors toute application répétée des règles 15 ... 28 se termine.

(1) Montrons que toute application des règles 1... 7 sur des sous-formules de travail commençant par $\neg^1(\exists\bar{x}\alpha \wedge \varphi)$ se termine. Du fait que les variables de V soient ordonnées par un ordre $\succ$ strict, total, dense et sans extrêmes, alors on peut associer à chaque variable x un entier positif $no(x)$, tel que $x \succ y$ ssi $no(x) > no(y)$. Soit maintenant le triplet (n_1, n_2, n_3) où

- n_1 est le nombre d'équations de la forme $x = fy_1...y_n$ dans α,
- n_2 est la somme des $no(x)$ pour toute occurrence d'une variable x dans α,
- n_3 est le nombre d'équations de la forme $y = x$ avec $x \succ y$ dans α.

Pour chaque règle, il existe un indice i tel que l'application des règles diminue ou ne change pas la valeur des n_j, avec $1 \leq j < i$, et diminue la valeur de n_i. Cet indice i est égal à 1 pour les règles (2) et (5), 2 pour les règles (1), (3), (6) et (7), et 3 pour la règle (4). A chaque séquence de formules obtenue par application finie des règles de réécriture, on peut associer une suite de triplets (n_1, n_2, n_3) qui est strictement décroissante dans l'ordre lexicographique. Du fait que les n_i soient des entiers positifs, ils ne peuvent pas être négatifs et donc cette suite est une suite finie et l'application des règles 1...7 se termine.

(2) Montrons maintenant que toute application des règles 8...14 sur des sous-formules de travail commençant par $\neg^4$ se termine. Cette terminaison est évidente du fait que les règles 8 ...12 transforment les équations et inéquations dans une forme de base et que les règles 13 et 14 suppriment les doubles occurrences de variables en mettant leur coefficient à zéro.

(3) Montrons maintenant que toute application répétée des règles 15 ... 28 se termine. En commençant avec une formule de travail initiale de la forme $\neg^6(\exists\varepsilon vrai \wedge \varphi)$, avec φ une conjonction de formules de travail où toutes les négations sont de la forme $\neg^0$, la règle 24 est la seule règle qui peut s'appliquer. Cette application va faire passer le $\neg^6$ au $\neg^7$ et tous les $\neg^0$ internes à $\neg^1$. D'après le point (1), dans une sous-formule de travail commençant par $\neg^1$, toute application répétée des règles 1... 7 se termine. Puis, la règle 15 change $\neg^1$ en $\neg^2$. Notons alors que sur une sous-formule de travail commençant par $\neg^2$, les règles 16, 17 et 18 peuvent être appliquées au plus une fois, pour chaque variable libre ne contenant aucune contrainte de typage dans $\alpha^c \wedge \alpha^p$, et créent de nouvelles formules de travail commençant par $\neg^1$. Cette boucle ne peut être infinie du fait que l'on n'ajoute jamais de nouvelles variables non typées. Notons également que toute application des règles 19 à 24 termine. Concernant les règles 25 et 27, elles ne peuvent s'appliquer qu'une seule fois sur chaque sous-formule de travail. Dans la règle 26 on remplace une sous-formule de travail contenant une séquence de $\neg^7\neg^8$ par la même formule de travail avec une séquence $\neg^7\neg^9$ et contenant $|I|$ formules de travail dans lesquelles on a supprimé toutes les occurrences de la forme $\neg^8$. Dans la règle 28 nous diminuons la profondeur de la formule de travail. Ces règles ne peuvent donc pas être appliquées indéfiniment. Cette terminaison est due en grande partie au rôle très important de l'indice k dans les symboles de négation de la forme $\neg^k$. Bien entendu, cette preuve est une preuve semi-formelle, on aurait pu effectuer une preuve beaucoup plus formelle mais moins intuitive en utilisant un très grand n-uplets.

Preuve, deuxième partie : Montrons que les règles sont correctes dans T^*_{ad}. Les règles 1..14 sont évidentes dans T^*_{ad} et se déduisent directement de l'axiomatisation de T^*_{ad}. Dans la règle 15, du fait que la section arborescente de $\alpha^c \wedge \alpha^p$ soit formatée et ne contienne pas de sous-formules de la forme $num\, x \wedge arbre\, x$, le symbole $\neg^1$peut être changé en $\neg^2$. Donc cette règle est correcte.

Dans la règle 16, du fait que $num\, z$ soit une conséquence de $\alpha^c \wedge \alpha^p$, alors la formule $\alpha^c \wedge \alpha^p$ est équivalente dans T^*_{ad} à $\alpha^c \wedge \alpha^p \wedge num\, z$. Donc cette règle est correcte. De la même manière, on montre la correction des règles 17 et 18.

Dans la règle 20, du fait que la section numérique de $\alpha^c \wedge \alpha^p$ soit inconsistante, alors la formule $\alpha^c \wedge \alpha^p$ est équivalente dans T^*_{ad} à *faux*. Donc cette règle est correcte.

Les règles 19, 21 et 22 sont correctes, car leurs conditions suffisent pour changer leurs symboles de négation en $\neg^3, \neg^4, \neg^5$ respectivement.

Correction de la règle 23 :

$$\neg^7 \begin{bmatrix} \exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \\ \neg^5(\exists \bar{y}\, \beta^c \wedge \beta^p \wedge \psi) \end{bmatrix} \Longrightarrow \neg^7 \begin{bmatrix} \exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \\ \neg^6(\exists \bar{y}\, \gamma^c \wedge \gamma^p \wedge \psi) \end{bmatrix}$$

γ^c est obtenue à partir de β^c comme suit : pour toute variable $x \in var(\beta^c)$, on ajoute toutes les relations $num\, x$ ou $arbre\, x$ qui sont dans la formule β^p mais pas dans β^c, et pour toute variable y qui n'apparaît pas dans une équation ou inéquation de de β^c, on supprime toute relation de la forme $num\, y$ ou $arbre\, y$ qui est dans β^c et β^p. La formule γ^p est la formule $\alpha^p \wedge \alpha^c$.

On sais que $\beta^c \wedge \beta^p$ est équivalente à $\gamma^c \wedge \beta^p$ dans T^*_{ad}. Soient alors β^p_t la section arborescente de β^p et β^p_n la section numérique de β^p. Soient α^{cp}_t la section arborescente de $\alpha^c \wedge \alpha^p$ et α^{cp}_n la section numérique de $\alpha^c \wedge \alpha^p$. D'après les conditions de $\neg^5$, α^{cp}_t et β^p_t ont le même ensemble de variables qui apparaissent dans un membre gauche d'équation. On a également $\alpha^{cp}_n = \beta^p_n$ et $T^*_{ad} \models \beta^c \wedge \beta^p \rightarrow \alpha^c \wedge \alpha^p$. Donc

$$T \models \gamma^c \wedge \beta^p \rightarrow \gamma^c \wedge \alpha^c \wedge \alpha^p,$$

et donc

$$T \models \gamma^c \wedge \beta^p_t \wedge \beta^p_n \rightarrow \gamma^c \wedge \alpha^{cp}_t \wedge \alpha^{cp}_n,$$

et donc

$$T \models \gamma^c \wedge \beta^p_t \wedge \alpha^{cp}_n \rightarrow \gamma^c \wedge \alpha^{cp}_t \wedge \alpha^{cp}_n.$$

Du fait que les sections arborescentes de $\gamma^c \wedge \beta^p_t$ et $\gamma^c \wedge \alpha^{cp}_t$ ont le même ensemble de variables qui apparaissent dans un membre gauche d'équation et du fait de la propriété 5.2.2.3, on a

$$T \models \gamma^c \wedge \beta^p_t \wedge \alpha^{cp}_n \leftrightarrow \gamma^c \wedge \alpha^{cp}_t \wedge \alpha^{cp}_n,$$

donc

$$T \models \beta^c \wedge \beta^p \leftrightarrow \gamma^c \wedge \alpha^c \wedge \alpha^p.$$

Du fait que $\gamma^p = \alpha^c \wedge \alpha^p$, alors la règle 23 est correcte dans T^*_{ad}.

Correction de la règle 24 :

$$\neg^6 \begin{bmatrix} \exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \\ \bigwedge_i \neg^0(\exists \bar{y}_i \beta^c_i \wedge \beta^p_i \wedge \varphi_i) \end{bmatrix} \Longrightarrow \neg^7 \begin{bmatrix} \exists \bar{x}^1 \bar{x}^2\, \alpha^{c1} \wedge \alpha^{c2} \wedge \alpha^p \wedge \\ \bigwedge_i \neg^1(\exists \bar{y}_i \bar{x}^3 \gamma^c_i \wedge \gamma^p_i \wedge \varphi_i) \end{bmatrix}$$

avec $\gamma^c_i = \beta^c_i \wedge \alpha^{c3}$ et $\gamma^p_i = \beta^p_i \wedge \alpha^{c1} \wedge \alpha^{c2} \wedge \alpha^p$.

D'après la définition 5.3.1.3 de formule de travail, du fait que l'on ait le symbole $\neg^6$ alors $\beta^p_i = \alpha^c \wedge \alpha^p$. Donc, le membre gauche de cette règle est équivalent dans T^*_{ad} à une formule de la forme

$$\neg(\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \bigwedge_i \neg(\alpha^c \wedge \alpha^p \wedge (\exists \bar{y}_i \beta^c_i \wedge \varphi_i))),$$

donc à

$$\neg(\exists\bar{x}\,\alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \bigwedge_i \neg(\exists\bar{y}_i\beta_i^c \wedge \varphi_i)).$$

D'après la propriété 5.3.1.6, la formule précédente est équivalente dans T^*_{ad} à

$$\neg(\alpha^p \wedge (\exists\bar{x}\,\alpha^c \wedge \bigwedge_i \neg(\exists\bar{y}_i\beta_i^c \wedge \varphi_i))).$$

D'après la définition 5.3.1.3 de formule de travail, du fait qu'on ait $\neg^6$ alors les conditions 4,5,6 de la définition 5.3.1.3 sont satisfaites. Ainsi, la formule $\exists\bar{x}\alpha^c$ peut être décomposée dans T^*_{ad}. La formule précédente est donc équivalente dans T^*_{ad} à une formule de la forme

$$\neg(\alpha^p \wedge (\exists\bar{x}^1\alpha^{c1} \wedge (\exists\bar{x}^2\alpha^{c2} \wedge (\exists\bar{x}^3\alpha^{c3} \wedge \bigwedge_i \neg(\exists\bar{y}_i\beta_i^c \wedge \varphi_i))))),$$

avec $T^*_{ad} \models \forall\bar{x}^2\alpha^{c2} \rightarrow \exists!\bar{x}^3\alpha^{c3}$. D'après le corollaire 3.1.0.8 du chapitre 3, la formule précédente est équivalente dans T^*_{ad} à

$$\neg(\alpha^p \wedge (\exists\bar{x}^1\alpha^{c1} \wedge (\exists\bar{x}^2\alpha^{c2} \wedge \bigwedge_i \neg(\exists\bar{x}^3\bar{y}_i\,\alpha^{c3} \wedge \beta_i^c \wedge \varphi_i)))),$$

c'est-à-dire à

$$\neg\left[\begin{array}{l}\exists\bar{x}^1\bar{x}^2\,\alpha^{c1} \wedge \alpha^{c2} \wedge \alpha^p \wedge \\ \bigwedge_i \neg(\exists\bar{x}^3\bar{y}_i\,\alpha^{c3} \wedge \beta_i^c \wedge \alpha^{c1} \wedge \alpha^{c2} \wedge \alpha^p \wedge \varphi_i)\end{array}\right].$$

Cette règle est donc correcte dans T^*_{ad}.

Correction de la règle 25

$$\neg^7\left[\begin{array}{l}\exists\bar{x}\,\alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \\ \bigwedge_{i\in I} \neg^9(\exists\bar{y}_i\beta_i^c \wedge \beta_i^p)\end{array}\right] \Longrightarrow \neg^8\left[\begin{array}{l}\exists\bar{x}^1\alpha^{c1} \wedge \alpha^{c2*} \wedge \alpha^p \wedge \\ \bigwedge_{i\in I'} \neg^9(\exists\bar{y}_i\beta_i^c \wedge \beta_i^{p*})\end{array}\right]$$

avec I' l'ensemble des $i \in I$ tels que β_i^c ne contienne pas d'occurrences d'aucune variable de $\bar{x}^2$. La formule α^{c2*} est telle que $T^*_{ad} \models (\exists\bar{x}^2\alpha^{c2}) \leftrightarrow \alpha^{c2*}$ et est obtenue en utilisant l'élimination de quantificateurs de Fourier. De plus, $\beta_i^{p*} = \alpha^{c1} \wedge \alpha^{c2*} \wedge \alpha^p$.

D'après la définition 5.3.1.3 de formule de travail, du fait que l'on ait $\neg^9$, alors la sixième condition de cette définition est satisfaite, par conséquent $\beta_i^p = \alpha^c \wedge \alpha^p$. Donc, le membre gauche de cette règle est équivalent dans T^*_{ad} à une formule de la forme

$$\neg(\exists\bar{x}\,\alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \bigwedge_i \neg(\alpha^c \wedge \alpha^p \wedge (\exists\bar{y}_i\beta_i^c \wedge \varphi_i))),$$

c'est-à-dire à

$$\neg(\exists\bar{x}\,\alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \bigwedge_i \neg(\exists\bar{y}_i\beta_i^c \wedge \varphi_i)).$$

qui d'après la propriété 5.3.1.6 est équivalente dans T^*_{ad} à une formule de la forme

$$\neg(\alpha^p \wedge (\exists\bar{x}\,\alpha^c \wedge \bigwedge_i \neg(\exists\bar{y}_i\beta_i^c \wedge \varphi_i))).$$

D'après la définition 5.3.1.3 de formule de travail, du fait que l'on ait $\neg^7$, alors les conditions 4,5,6 et 7 de cette définition sont satisfaites. Donc la formule $\exists\bar{x}\alpha^c$ peut être décomposée dans T^*_{ad} avec $\exists\bar{x}^3\alpha^{c3} = \exists\varepsilon vrai$. La formule précédente est donc équivalente dans T^*_{ad} à

$$\neg(\alpha^p \wedge (\exists\bar{x}^1\alpha^{c1} \wedge (\exists\bar{x}^2\alpha^{c2} \wedge \bigwedge_i \neg(\exists\bar{y}_i\beta_i^c \wedge \varphi_i)))).$$

Notons I_1, l'ensemble des $i \in I$ tels que x^2_n n'ait pas d'occurrences libres dans $\exists \bar{y}^1_i \beta^{c1}_i$. la formule précédente est donc équivalente dans T^*_{ad} à

$$\neg(\alpha^p \wedge (\exists \bar{x}^1 \alpha^{c1} \wedge \alpha^p \wedge \begin{bmatrix} \exists x^2_1 ... \exists x^2_{n-1} \\ (\bigwedge_{i \in I_1} \neg(\exists \bar{y}^1_i \beta^{c1}_i)) \wedge \\ (\exists x^2_n \, \alpha^{c2} \wedge \bigwedge_{i \in I - I_1} \neg(\exists \bar{y}^{c1}_i \beta^{c1}_i)) \end{bmatrix})). \tag{5.14}$$

D'après les propriétés 3.1.0.4, 5.2.3.2 et 5.2.3.3, la formule (5.14) est équivalente dans T^*_{ad} à

$$\neg(\alpha^p \wedge (\exists \bar{x}^1 \alpha^1 \wedge \alpha^p \wedge \begin{bmatrix} \exists x^2_1 ... \exists x^2_{n-1} \\ (\bigwedge_{i \in I_1} \neg(\exists \bar{y}^1_i \beta^{c1}_i)) \wedge \\ (\exists x^2_n \, \alpha^{c2}) \end{bmatrix})). \tag{5.15}$$

D'après la propriété 5.2.3.4, il existe $\alpha^{c2}_n \in A^2$ tel que $T^*_{ad} \models (\exists x^2_n \, \alpha^{c2}) \leftrightarrow \alpha^{c2}_n$ avec $\alpha^{c2}_n \in A^2$. La formule précédente est donc équivalente dans T^*_{ad} à

$$\neg(\alpha^p \wedge (\exists \bar{x}^1 \alpha^{c1} \wedge \alpha^p \wedge (\exists x^2_1 ... \exists x^2_{n-1} \bigwedge_{i \in I_1} \neg(\exists \bar{y}^1_i \beta^{c1}_i) \wedge \alpha^{c2}_n))),$$

c'est-à-dire à

$$\neg(\alpha^p \wedge (\exists \bar{x}^1 \alpha^{c1} \wedge \alpha^p \wedge (\exists x^2_1 ... \exists x^2_{n-1} \, \alpha^{c2}_n \wedge \bigwedge_{i \in I_1} \neg(\exists \bar{y}^1_i \beta^{c1}_i)))).$$

En répétant les étapes précédentes $(n-1)$ fois et en notant I_k l'ensemble des $i \in I_{k-1}$ tels que $x^2_{(n-k+1)}$ n'ait pas d'occurrences dans $\exists \bar{y}^1_i \beta^{c1}_i$, alors la formule précédente est équivalente dans T^*_{ad} à

$$\neg(\alpha^p \wedge (\exists \bar{x}^1 \alpha^{c1} \wedge \alpha^{c2}_1 \wedge \alpha^p \wedge \bigwedge_{i \in I_n} \neg(\exists \bar{y}^1_i \beta^{c1}_i))),$$

c'est-à-dire à

$$\neg(\exists \bar{x}^1 \alpha^{c1} \wedge \alpha^{c2}_1 \wedge \alpha^p \wedge \bigwedge_{i \in I_n} \neg(\exists \bar{y}^1_i \beta^{c1}_i \wedge \alpha^{c1} \wedge \alpha^{c2}_1 \wedge \alpha^p)).$$

Cette règle est donc correcte dans T^*_{ad}.

Correction de la règle 26

$$\neg^7 \begin{bmatrix} \exists \bar{x} \, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \\ \neg^8(\exists \bar{y} \beta^c \wedge \beta^p) \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} \neg^7(\exists \bar{x} \, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \neg^9(\exists \bar{y} \beta^{c1} \wedge \beta^p)) \wedge \\ \bigwedge_{i \in I} \neg^1(\exists \bar{x} \bar{y} \beta^p \wedge \beta^{c1} \wedge \beta^{c2*}_i \wedge \varphi_0) \end{bmatrix}$$

où la formule φ est telle que $k \geq 6$ pour tout symbole de négation $\neg^k$, la formule φ_0 est obtenue à partir de φ en remplaçant toute occurrence de $\neg^k$ par $\neg^0$ et toute section de contraintes propagées par la formule *vrai*. Soit β^2 la formule obtenue de β^{c2} en supprimant de β^{c2} les occurrences multiples des contraintes de typage, et toutes les relations *num* y ou *arbre* y qui sont à la fois dans β^{c1} et dans β^{c2} pour toute variable y n'apparaissant pas dans une inéquation de β^{c2}. Si β^2 est la formule *vrai* alors $I = \emptyset$, sinon les formules β^{c2*}_i avec $i \in I$ sont obtenues de β^2 comme suit :

Du fait que $\beta^2 \in A^2$, alors β^2 est de la forme

$$\begin{bmatrix} (\bigwedge_{\ell \in L} \mathit{num}\, z_\ell) \wedge (\bigwedge_{k \in K} \mathit{arbre}\, v_k) \wedge \\ ((\bigwedge_{j \in J} \sum_{i=1}^n a_{ij}.x_i < a_{0j}.1) \wedge \bigwedge_{m=1}^n \mathit{num}\, x_m) \end{bmatrix},$$

donc $\neg\beta^2$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} (\bigvee_{\ell \in L} \mathit{arbre}\ z_\ell) \vee (\bigvee_{k \in K} \mathit{num}\, v_k) \vee (\bigvee_{m=1}^n \mathit{arbre}\, x_m) \\ \bigvee_{j \in J}((\sum_{i=1}^n a_{ij}.x_i = a_{0j}.1 \wedge \bigwedge_{m=1}^n \mathit{num}\, x_m) \vee \\ (\sum_{i=1}^n (-a_{ij}).x_i < (-a_{0j}).1 \wedge \bigwedge_{m=1}^n \mathit{num}\, x_m)) \end{bmatrix}.$$

Chaque élément de cette disjonction représente une formule β_i^{c2*}. Bien entendu $T^*_{ad} \models (\neg\beta^2) \leftrightarrow \bigvee_i \beta_i^{c2*}$.

Du fait que l'on ait $\neg^8$, alors d'après la définition 5.3.1.3, la formule $\exists\bar{y}\beta^c$ est équivalente dans T^*_{ad} à une formule décomposée de la forme $\exists\bar{y}\beta^{c1} \wedge \beta^{c2}$ avec $\exists\bar{y}\beta^{c1} \in A^1$. Soit β^2 la formule obtenue de β^{c2} en supprimant de β^{c2} les occurrences multiples des contraintes de typage et pour toute variable y n'apparaissant pas dans une inéquation de β^{c2} en supprimant de β^{c2} toutes les relations *num* y ou *arbre* y qui sont à la fois dans β^{c1} et β^{c2}. Le membre gauche de cette règle est équivalent dans T^*_{ad} à

$$\neg(\exists\bar{x}\alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \neg(\exists\bar{y}\beta^p \wedge \beta^{c1} \wedge \beta^2)).$$

D'après la définition de l'ensemble A^1 et de la propriété 5.2.1.1, on a $T^*_{ad} \models \exists?\bar{y}\beta^{c1}$, donc $T^*_{ad} \models \exists?\bar{y}\beta^{c1} \wedge \beta^p$. D'après la propriété 3.1.0.6 du chapitre 3, la formule précédente est équivalente dans T^*_{ad} à

$$\neg(\exists\bar{x}\alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \neg(\exists\bar{y}\beta^p \wedge \beta^{c1})) \vee \neg(\exists\bar{x}\bar{y}\beta^p \wedge \beta^{c1} \wedge \neg\beta^2 \wedge \varphi).$$

D'après les conditions de cette règle, la formule $\neg\beta^2$ est équivalente dans T^*_{ad} à une disjonction de la forme $\bigvee_{i\in I} \beta_i^{c2*}$. La formule précédente est donc équivalente dans T^*_{ad} à

$$\neg(\exists\bar{x}\alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \neg(\exists\bar{y}\beta^p \wedge \beta^{c1})) \wedge \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists\bar{x}\bar{y}\beta^p \wedge \beta^{c1} \wedge \beta_i^{c2*} \wedge \varphi).$$

La sous-formule $\neg(\exists\bar{y}\beta^p \wedge \beta^{c1})$ satisfait aux conditions de $\neg^9$. Du fait que dans φ, chaque négation soit de la forme $\neg^k$ avec $k \geq 6$, alors en appliquant, la propriété 5.3.1.6 en commençant par la sous-formule de travail la plus profonde de φ jusqu'à arriver à φ, toutes les sections de contraintes propagées peuvent être supprimées et remplacées par la formule *vrai*. Tous les symboles $\neg^k$ de cette formule peuvent alors être remplacés par $\neg^0$. Donc cette règle est correcte dans T^*_{ad}.

Correction de la règle 27

$$\neg^7(\exists\bar{x}\,\alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \neg^9(\exists\varepsilon\, \mathit{vrai} \wedge \beta^p)) \Longrightarrow \mathit{vrai}.$$

D'après les propriétés de $\neg^9$ de la définition 5.3.1.3, la formule β^p est la formule $\alpha^c \wedge \alpha^p$. Cette règle est donc correcte dans T^*_{ad}.

Correction de la règle 28

$$\neg^7\left[\begin{array}{l}\exists\bar{x}\,\alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \\ \neg^8\left[\begin{array}{l}\exists\bar{y}\,\beta^c \wedge \beta^p \wedge \\ \bigwedge_{i\in I} \neg^9(\exists\bar{z}_i\,\gamma_i^c \wedge \gamma_i^p)\end{array}\right]\end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{l}\neg^7(\exists\bar{x}\,\alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \neg^8(\exists\bar{y}\,\beta^c \wedge \beta^p)) \wedge \\ \bigwedge_{i\in I} \neg^6(\exists\bar{x}\bar{y}\bar{z}_i\,\delta_i^c \wedge \delta_i^p \wedge \varphi_0)\end{array}\right]$$

Dans la règle 28, $I \neq \emptyset$, la formule φ est telle que $k \geq 6$ pour tout symbole de négation $\neg^k$, φ_0 est obtenue à partir de φ en remplaçant toute occurrence de $\neg^k$ par $\neg^0$ et toute section de contraintes propagées par *vrai*. De plus, $\delta_i^p = \alpha^p$, $\delta_i^c = \gamma_i^c \wedge \beta^c$.

D'après les propriétés de $\neg^8$ et $\neg^9$ de la définition 5.3.1.3 , on a $\beta^p = \alpha^c \wedge \alpha^p$ et $\gamma^p = \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \beta^c$. Le membre gauche de cette règle est donc équivalent dans T^*_{ad} à

$$\neg(\exists\bar{x}\alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \neg(\exists\bar{y}\beta^c \wedge \bigwedge_{i\in I} \neg(\exists\bar{z}_i\gamma_i^c))). \tag{5.16}$$

De même, d'après les propriété de $\neg^9$ et la définition de l'ensemble A^1, toutes les variables de $\bar{y}$ sont accessibles dans $\exists\bar{y}\beta^c$. Donc, en utilisant la propriété 5.2.1.1, on obtient $T^*_{ad} \models \exists?\bar{y}\beta^c$. D'après le corollaire 3.1.0.6 défini dans le chapitre 3, la formule (5.16) est équivalente dans T^*_{ad} à

$$\neg((\exists\bar{x}\alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \neg(\exists\bar{y}\beta^c)) \vee \bigvee_{i\in I} (\exists\bar{x}\bar{y}\bar{z}_i\gamma_i^c \wedge \beta^c \wedge \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi)),$$

c'est-à-dire à

$$\neg(\exists \bar{x}\alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \neg(\exists \bar{y}\beta^c \wedge \alpha^c \wedge \alpha^p)) \wedge \textstyle\bigwedge_{i\in I} \neg(\exists \bar{x}\bar{y}\bar{z}_i\gamma_i^c \wedge \beta^c \wedge \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi).$$

Du fait que $\beta^p = \alpha^c \wedge \alpha^p$, $\delta_i^p = \alpha^p$ et $\delta_i^c = \gamma_i^c \wedge \beta^c \wedge \alpha^c$ alors la formule précédente est équivalente dans T^*_{ad} à

$$\neg^7(\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \neg^8(\exists \bar{y}\, \beta^c \wedge \beta^p)) \wedge \bigwedge_{i\in I} \neg^6(\exists \bar{x}\bar{y}\bar{z}_i\, \delta_i^c \wedge \delta_i^p \wedge \varphi_0).$$

Il est clair que $\neg(\exists \bar{y}\beta^c \wedge \beta^p)$ satisfait aux conditions de $\neg^9$ de la définition 5.3.1.3. De plus, du fait que dans φ, chaque négation soit de la forme $\neg^k$ avec $k \geq 6$, alors en appliquant la propriété 5.3.1.6 en commençant par la sous-formule de travail la plus profonde de φ jusqu'à arriver à φ, toutes les sections de contraintes propagées peuvent être supprimées et remplacées par la formule *vrai*. Tous les symboles $\neg^k$ de cette formule peuvent alors être remplacés par $\neg^0$. Donc cette règle est correcte dans T^*_{ad}.

Preuve troisième partie : Montrons que toute application finie des règles de réécriture sur une formule de travail initiale produit une formule de travail finale. Soit alors une formule de travail initiale de la forme $\neg^6(\exists \varepsilon\ \mathit{vrai} \wedge \bigwedge_{i\in I} \varphi_i)$, où toutes les négations des φ_i sont de la forme $\neg^0$. La seule règle qui puisse s'appliquer sur cette formule est la règle 24, qui lance le processus du parcours descendant avec simplification et propagation. Ce sont les règles 1...24 qui entrent en jeu dans cette étape. A la fin de cette étape, toutes les sous-formules de travail contiennent des négations de la forme $\neg^7$.

La règle 25

$$\neg^7 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \\ \bigwedge_{i\in I} \neg^9(\exists \bar{y}_i\beta_i^c \wedge \beta_i^p) \end{array}\right] \Longrightarrow \neg^8 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{x}^1\alpha^{c1} \wedge \alpha^{c2*} \wedge \alpha^p \wedge \\ \bigwedge_{i\in I'} \neg^9(\exists \bar{y}_i\beta_i^c \wedge \beta_i^{p*}) \end{array}\right]$$

avec $I = \emptyset$ peut alors être appliquée sur les sous-formules de travail les plus imbriquées en faisant changer les négations de la forme $\neg^7$ à la forme $\neg^8$, puis la règle 26,

$$\neg^7 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \\ \neg^8(\exists \bar{y}\beta^c \wedge \beta^p) \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \neg^7(\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \neg^9(\exists \bar{y}\beta^{c1} \wedge \beta^p)) \wedge \\ \bigwedge_{i\in I} \neg^1(\exists \bar{x}\bar{y}\beta^p \wedge \beta^{c1} \wedge \beta_i^{c2*} \wedge \varphi_0) \end{array}\right]$$

en changeant toute séquence de la forme $\neg^7\neg^8$ à la forme $\neg^7\neg^9$. Cette règle crée alors une conjonction de formules de travail contenant chacune des négations de la forme $\neg^1$ et sur lesquelles la première étape de propagation va encore s'appliquer. Une fois les séquences $\neg^7\neg^9$ obtenues une des règles 27 ou 25 peut s'appliquer en changeant les négations internes de la forme $\neg^7\neg^8$ à la forme $\neg^8\neg^9$. Notons alors que si le niveau le plus profond d'une formule de travail contient à ce stade-là une négation de la forme $\neg^9$, alors la sur-formule immédiate contient obligatoirement une négation de la forme $\neg^8$, et les autres sur-formules ont toutes des négations de la forme $\neg^7$, du fait de la première phase de propagation. On a alors une séquence $\neg^7\neg^8\neg^9$ qui en appliquant la règle 28

$$\neg^7 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \\ \neg^8 \left[\begin{array}{l} \exists \bar{y}\, \beta^c \wedge \beta^p \wedge \\ \bigwedge\limits_{i\in I} \neg^9(\exists \bar{z}_i\, \gamma_i^c \wedge \gamma_i^p) \end{array}\right] \end{array}\right] \Longrightarrow \left[\begin{array}{l} \neg^7(\exists \bar{x}\, \alpha^c \wedge \alpha^p \wedge \varphi \wedge \neg^8(\exists \bar{y}\, \beta^c \wedge \beta^p)) \wedge \\ \bigwedge\limits_{i\in I} \neg^6(\exists \bar{x}\bar{y}\bar{z}_i\, \delta_i^c \wedge \delta_i^p \wedge \varphi_0) \end{array}\right]$$

diminue d'un niveau en supprimant la négation $\neg^9$. Notant que dans nos condition nous interdisons l'application de cette règle sur le premier niveau de la formule de travail globale. Cette phase de transformation est alors répétée pour obtenir finalement une formule de travail de la forme

$$\neg^7(\exists\varepsilon\, vrai \wedge \bigwedge_{i\in I} \neg^8(\exists\bar{x}_i\, \alpha_i^c \wedge \alpha_i^p \wedge \bigwedge_{j\in J_i} \neg^9(\exists\bar{y}_{ij}\, \beta_{ij}^c \wedge \beta_{ij}^p))),$$

qui est bien une formule de travail finale.

5.3.4 Algorithme de résolution

La résolution d'une contrainte générale φ dans T^*_{ad} se fait de la façon suivante

1. Transformer φ en une formule normalisée équivalente dans T^*_{ad}, puis en une formule de travail initiale ϕ équivalente dans T^*_{ad}.
2. Transformer ϕ en une formule de travail finale ψ en utilisant les règles de réécriture définies dans la sous-section 5.3.3.
3. Extraire de ψ la disjonction de formules résolues générales équivalente à ψ dans T^*_{ad} en utilisant la propriété 5.3.1.5. Si la disjonction contient la formule générale résolue *vrai*, elle se réduit alors à *vrai*.

Exemple 5.3.4.1 *Etudions dans cet exemple la résolution de la contrainte suivante ayant les variables* i, j *comme variables libres*

$$\exists x\, x = fij \wedge i > 0 \wedge arbre\, x \wedge num\, i \wedge num\, j \wedge \neg(\exists k\, j = 2k \wedge num\, k) \tag{5.17}$$

En examinant cette contrainte dans la théorie T^*_{ad}*, on peut remarquer que*

$$num\, j \wedge \neg(\exists k\, j = 2k \wedge num\, k),$$

est toujours faux car d'après l'axiome 13_n *avec* $n = 2$*, pour chaque* j *tel que* $num\, j$*, il existe toujours un unique* k *tel que* $num\, k$ *et* $j = 2k$*. Donc bien que la formule (5.17) contienne deux variables libres, elle est toujours équivalente à faux dans* T^*_{ad}*. Utilisons maintenant notre algorithme pour résoudre cette contrainte. La formule précédente est d'abord transformée en la formule initiale suivante (les sections de contraintes propagées sont soulignées)*

$$\neg^6\neg^0\begin{bmatrix} \exists x\, x = fij \wedge i > 0 \wedge arbre\, x \wedge num\, j \wedge \underline{vrai} \wedge \\ \neg^0(\exists k\, j = 2k \wedge num\, k \wedge \underline{vrai}). \end{bmatrix}$$

Après avoir appliqué les règles 24, 15, 16, 15, 19, 21, 22, 23 dans cet ordre, on obtient la formule équivalente dans T^*_{ad} *suivante*

$$\neg^7\neg^6\begin{bmatrix} \exists x\, x = fij \wedge i > 0 \wedge arbre\, x \wedge num\, i \wedge num\, j \wedge \underline{vrai} \wedge \\ \neg^0(\exists k\, j = 2k \wedge num\, k \wedge \underline{vrai}) \end{bmatrix}.$$

Seule la règle 24 peut s'appliquer, donnant

$$\neg^7\neg^7\begin{bmatrix} i > 0 \wedge num\, i \wedge num\, j \wedge \underline{vrai} \wedge \\ \neg^1\begin{bmatrix} \exists xk\, x = fij \wedge j = 2k \wedge num\, k \wedge arbre\, x \wedge \\ \underline{i > 0 \wedge num\, i \wedge num\, j} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Les règles 15, 19, 21, 12, 22, 23 peuvent s'appliquer dans l'ordre sur la sous-formule de travail $\neg^1(...)$*, l'application donne la formule équivalente dans* T^*_{ad} *suivante*

$$\neg^7\neg^7\begin{bmatrix} i > 0 \wedge num\, i \wedge num\, j \wedge \underline{vrai} \wedge \\ \neg^6\begin{bmatrix} \exists xk\, x = fij \wedge j - 2k = 0 \wedge num\, k \wedge arbre\, x \wedge \\ \underline{i > 0 \wedge num\, i \wedge num\, j} \end{bmatrix} \end{bmatrix}.$$

Seule la règle 24 peut s'appliquer. On obtient alors

$$\neg^7\neg^7\left[\begin{array}{l} i > 0 \wedge num\, i \wedge num\, j \wedge \underline{vrai} \wedge \\ \neg^7(vrai \wedge \underline{i > 0 \wedge num\, i \wedge num\, j}) \end{array}\right].$$

Les règles 25, 26 s'appliquent dans l'ordre et donnent la formule équivalente dans T^*_{ad} suivante

$$\neg^7\neg^7\left[\begin{array}{l} i > 0 \wedge num\, i \wedge num\, j \wedge \underline{vrai} \wedge \\ \neg^9(vrai \wedge \underline{i > 0 \wedge num\, i \wedge num\, j}) \end{array}\right].$$

Finalement, seule la règle 27 peut s'appliquer et on obtient la formule de travail finale $\neg^7 vrai$, qui d'après la propriété 5.3.1.5 (avec $I = \emptyset$) est équivalente à la disjonction vide de formules résolues générales, c'est-à-dire à la formule faux.

Du fait que T^*_{ad} ait au moins un modèle, et en utilisant les propriétés 5.3.3.1, 5.3.1.5 et 5.3.1.7, on obtient le corollaire suivant

Corollaire 5.3.4.2 *Chaque formule est équivalente dans T^*_{ad} soit à vrai, soit à faux, soit à une disjonction de formules résolues générales, ayant au moins une variable libre et qui n'étant équivalente ni à vrai ni à faux dans T^*_{ad}.*

Chapitre 6

Conclusion générale

Nous avons présenté dans cette thèse deux nouvelles classes de théories appelées *infini-décomposable* et *zéro-infini-décomposable* et avons donné pour chacune de ces classes un algorithme de décision de propositions. Nous avons également donné une manière automatique pour combiner toute théorie T du premier ordre à la théorie des arbres finis ou infinis et avons montré que si T est flexible alors son extension en arbres T^* est zéro-infini-décomposable et donc complète. Nous avons terminé cette thèse par un algorithme de résolution effective de contraintes générales du premier ordre dans une combinaison d'arbres et de rationnels additifs ordonnés.

S. Vorobyov [41] a montré que le problème de décision de propositions dans la théorie des arbres finis ou infinis est de complexité non-élémentaire, c'est-à-dire que la complexité de tout algorithme de décision de propositions dans la théorie des arbres finis ou infinis n'est pas borné par une tour de puissances de 2 dont la hauteur est fixe. A. Colmerauer et T. Dao [7] ont également donné une preuve de la non-élementarité de la complexité de cette théorie. Par conséquent, la complexité des algorithmes donnés dans les chapitres 2, 3, et 5 est également non-élémentaire. En effet, on montre facilement que la taille de la conjonction finale de formules résolues est bornée par une tour de puissances de 2 dont la hauteur est proportionnelle à la profondeur de la formule initiale. La fonction $\alpha(\varphi)$ utilisée pour montrer la terminaison de nos règles, illustre très bien cette complexité non-commode. Cependant, l'algorithme de résolution de contraintes générales donné dans le chapitre 5 se réduit naturellement à l'algorithme de [16], si la formule initiale contient uniquement des contraintes d'arbres bien typées. Nous obtiendrons alors certainement les mêmes performances que celles de [16] ; on notera entre autres une résolution effective d'une contrainte contenant 160 quantificateurs imbriqués et exprimant les solutions des positions gagnantes sur des jeux à deux partenaires. Par ailleurs, les contraintes des positions k-gagnantes introduites dans [16, 7] s'expriment d'une manière beaucoup plus simple dans une extension en arbres des entiers naturelles. En effet, alors que l'entier a est exprimé dans [16] à l'aide de l'arbre[28] $f^a(0)$, ce dernier sera exprimé directement par le terme a dans l'extension en arbres des entiers naturelles. Cette simplification nous laisse alors espérer de meilleurs performances, en termes de temps d'exécution et de profondeur maximale de formule résolue, par rapport à celles obtenues dans [16].

Actuellement, nous essayons de trouver une caractérisation des théories décomposables beaucoup plus simple que celle donnée dans cette thèse. Une des pistes intéressantes à explorer serait d'ajouter de nouveaux quantificateurs tels que $\exists^n$ *(il existe n)* et $\exists^{\Psi(u)}_{n,\infty}$ *(il existe n ou une infinité)*, afin d'augmenter la taille de l'ensemble des théories décomposables et de montrer une éventuelle équivalence entre théories décomposables et théories complètes ! Pour le moment nous

[28]Bien entendu $f^0(x) = x$ et $f^{a+1}(x) = f(f^a(x))$

ne disposons que de l'implication : théorie décomposable $\Longrightarrow$ théorie complète.

A ce jour, nous avons établi une longue liste de théories infini-décomposables et zéro-infini-décomposables. On citera par exemple : la théorie de l'égalité, la théorie des arbres finis, la théorie des arbres infinis, la théorie des arbres finis ou infinis [19], la théorie des rationnels ou réels additifs ordonnés, la théorie de l'ordre dense sans extrêmes, la théorie des rationnels additifs ordonnés [24], la construction d'arbres sur un ensemble ordonné [23] et l'extension en arbres des théories flexibles [20]. Nous travaillons actuellement sur les décompositions des listes et des queues [39], ainsi qu'une éventuelle décomposition de la combinaison des arbres finis ou infinis et des réels additifs ordonnés munis de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et d'une relation d'ordre dense sans extrêmes. Nous essayons également de trouver des méthodes beaucoup plus intuitives pour trouver les ensembles $\psi(u)$, A', A'' et A'''.

Notre but initial dans nos recherches était de donner des axiomatisations de théories complexes autour des arbres et de montrer leur complétude. Nous avons fait mieux, en définissant la notion *d'extension en arbres de théories* et en donnant des conditions sur T et uniquement sur T pour que la théorie T+Arbre soit complète. Nous avons également montré la complétude d'une théorie construite sur le modèle de Prolog III et qui était à ce jour non démontrée. Afin d'enrichir ce travail théorique, nous planifions avec Thom Fruehwirth [27] d'étendre le langage CHR afin qu'il puisse traiter les formules quantifiées. Pour cela, nous allons doter CHR d'un mécanisme pour manipuler nos formules normalisées, ce qui nous permettra d'effectuer des implantations rapides de nos algorithmes, de les améliorer et de se faire une idée sur l'expressivité des contraintes hybrides dans des théories complètes autour des arbres.

Bibliographie

[1] Benhamou, F., Colmerauer, A., Garetta, H., Pasero, R. et Van-Caneghem, M. 1996. Le manuel de Prolog IV. PrologIA, Marseille, France.

[2] Burckert, H. 1988. Solving disequations in equational theories. In Proceeding of the 9th Conference on Automated Deduction, LNCS 310, pp. 517–526, Springer-Verlag.

[3] Clark, K.L. 1978. Negation as failure. Logic and Data bases. Ed Gallaire, H. and Minker, J. Plenum Pub.

[4] Colmerauer, A. 1982. Prolog and infinite trees. In K.L. Clark and S-A. Tarnlund, editors, Logic Programming. Academic Press. pp. 231–251.

[5] Colmerauer, A. 1984. Equations and inequations on finite and infinite trees. In Proceeding of the International conference of the fifth generation of computer systems, pp. 85–99.

[6] Colmerauer, A. 1990. An introduction to Prolog III. Communication of the ACM, 33(7) :68–90.

[7] Colmerauer, A. and Dao, T. 2003. Expressiveness of full first-order formulas in the algebra of finite or infinite trees, Constraints, 8(3) : 283–302.

[8] Comon, H. 1988. Unification et disunification : Théorie et applications. Thèse d'informatique. Institut National Polytechnique de Grenoble.

[9] Comon, H. and Lescanne, P. 1989. Equational problems and disunification. Journal of Symbolic Computation, 7 : 371–425.

[10] Comon, H. 1991. Disunification : a survey. In J.L. Lassez and G. Plotkin, editors, Computational Logic : Essays in Honor of Alan Robinson. MIT Press.

[11] Comon, H. 1991. Résolution de contraintes dans des algèbres de termes. Rapport d'Habilitation, université de Paris Sud.

[12] Courcelle, B. 1983. Fundamental Properties of Infinite Trees, Theoretical Computer Science, 25(2) :95–169.

[13] Courcelle, B. 1986. Equivalences and Transformations of Regular Systems applications to Program Schemes and Grammars, Theoretical Computer Science, 42 : 100–122.

[14] Dao, T. and Djelloul, K. 2006. Solving first order constraints in evaluated trees. In Proceedings of the 11th ERCIM Workshop on Constraint Solving and Constraint Logic Programming (CSCLP'06) (à paraître)

[15] Dao, T. et Djelloul, K. 2006. Résolution de contraintes du premier ordre dans la théorie des arbres évalués. Dans les actes de la deuxième journée francophone de programmation par contraintes (JFPC'06). (à paraître)

[16] Dao, T. 2000. Résolution de contraintes du premier ordre dans la théorie des arbres finis ou infinis. Thèse d'informatique, université de la Méditerranée, France.

[17] Dao, T. and Djelloul, K. 2006. Solving first order constraints in evaluated trees. International conference on logic programming (ICLP'06). (Poster)

[18] Djelloul, K. 2006. Decomposable theories. Journal of Theory and Practice of Logic Programming (TPLP). Cambridge journals. (à paraître)

[19] Djelloul, K. and Dao, T. 2006. Solving First-Order constraints in the Theory of Finite or Infinite Trees : Introduction to the Decomposable Theories. In Proceedings of the 21st ACM Symposium on Applied Computing (SAC'06). ACM press (à paraître).

[20] Djelloul, K. and Dao, T. 2006. Complete first-order axiomatization of the M-extended trees. In Proceeding of the 20th Workshop on (constraints) Logic Programming (WLP'06). INFSYS Research Report 1843-06-02, pp. 111–119.

[21] Djelloul, K. et Dao, T. 2006. Extension en arbres de théories du premier ordre. Dans les actes de la deuxième journée francophone de programmation par contraintes (JFPC'06). (à paraître)

[22] Djelloul, K. 2006. Résolution de contraintes du premier ordre dans des théories dites décomposables. Article long dans les actes du septième congres de la société française de recherche opérationnelle et d'aide à la décision (ROADEF'06). Presses universitaires de Valenciennes, pp 355–368.

[23] Djelloul, K. 2005. Complete first-order axiomatisation of the construction of trees on an ordered set. In Proceedings of the 2005 International Conference on Foundations of Computer Science (FCS'05), CSREA Press, pp. 87–93.

[24] Djelloul, K. 2005. About the combination of trees and rational numbers in a complete first-order theory. In Proceeding of the 5th International conference on frontiers of combining systems (FroCoS'05), Springer Lecture Notes in Artificial Intelligence, vol 3717, pp. 106–122.

[25] Djelloul, K. 2005. Les arbres aux feuilles ordonnées : une théorie complète pour la représentation des connaissances. Dans les actes de la 7ème rencontre nationale des jeunes chercheurs en intelligence artificielle (RJCIA'05). AFIA - Presses de Grenoble, pp. 267–280.

[26] Djelloul, K. 2003. Intégration des rationnels additifs et des arbres constructibles dans une théorie complète du premier ordre. Mémoire de DEA. Université de la Méditerranée, France.

[27] Fruehwirth, T. and Abdelnnadher, S. Essentials of constraints programming. Springer Cognitive technologies.

[28] Huet, G. 1976. Résolution d'équations dans les langages d'ordre 1, 2,...ω. Thèse d'Etat, université Paris 7. France.

[29] Jaffar, J. 1984. Efficient unification over infinite terms. New Generation Computing, 2(3) : 207–219.

[30] John, E. and Ullman, D. 1979. Introduction to automata theory, languages and computation. Addison-Wesley publishing company.

[31] Kunen, K. 1987. Negation in logic programming. Journal of Logic Programming, 4 : 289–308.

[32] Lyndon, R.C. 1964. Notes on logic. Van Nostrand Mathematical studies.

[33] Maher, M. 1988. Complete axiomatization of the algebra of finite, rational and infinite trees. Technical report, IBM - T.J.Watson Research Center.

[34] Malcev, A. 1971. Axiomatizable classes of locally free algebras of various types. In B.Wells III, editor, The Metamathematics of Algebraic Systems. Anatolii Ivanovic Malcev. Collected Papers : 1936-1967, volume 66, chapter 23, pp. 262–281.

[35] Matelli, A. and Montanari, U. 1982. An efficient unification algorithm. ACM Trans. on Languages and Systems, 4(2) : 258–282.

[36] Paterson, M. and Wegman, N. 1978. Linear unification. Journal of Computer and Systems Science, 16 :158–167.

[37] Ramachandran, V. and Van Hentenryck, P. 1993. Incremental algorithms for formula solving and entailment over rational trees. Proceeding of the 13th Conference Foundations of Software Technology and Theoretical Computer Science, LNCS volume 761, pp. 205–217.

[38] Robinson, J.A. 1965. A machine-oriented logic based on the resolution principle. JACM, 12(1) :23–41.

[39] Rybina, T. and Voronkov, A. 2001. A decision procedure for term algebras with queues. ACM transaction on computational logic. 2(2) : 155-181.

[40] Smith, A. 1991. Constraint operations for CLP. In Logic Programming : Proceedings of the 8th International Conference. Paris. pp. 760–774.

[41] Vorobyov, S. 1996. An Improved Lower Bound for the Elementary Theories of Trees, Proceeding of the 13th International Conference on Automated Deduction (CADE'96). Springer Lecture Notes in Artificial Intelligence, vol 1104, pp. 275– 287.

Résumé

L'objet de cette thèse est l'étude d'une méthode générale pour combiner une théorie quelconque du premier ordre à la théorie des arbres finis ou infinis. Pour cela :

Nous introduisons tout d'abord deux classes de théories qu'on appelle *infini-décomposable* et *zéro-infini-décomposable*. Nous montrons alors que ces théories sont complètes et acceptent un algorithme de décision de propositions qui pour toute proposition donne soit *vrai* soit *faux*. Nous montrons également que ces classes de théories englobent un grand nombre de théories fondamentales, nous citerons par exemple : la théorie des rationnels additifs, la théorie de l'ordre dense sans extrêmes, la théorie des arbres finis ou infinis, la construction d'arbres sur un ensemble ordonné et la combinaison d'arbres finis ou infinis et de rationnels additifs ordonnés.

Nous donnons ensuite une manière automatique pour mélanger toute théorie du premier ordre T à la théorie des arbres finis ou infinis. Un tel mélange est alors appelé *extension en arbres* de la théorie T et est noté T^*. Après avoir défini l'axiomatisation de T^* à partir de T, nous définissons une classe de théories qu'on appelle *flexible* et montrons que si T est flexible alors T^* est zéro-infini-décomposable, et donc complète. Les théories flexibles sont des théories ayant des propriétés agréables qui nous permettent de manipuler facilement les formules du premier ordre. On montrera entre autres que la théorie T_{ad} des rationnels additifs ordonnés est flexible et par conséquent que l'extension en arbres T_{ad}^* de T_{ad} est complète.

Nous terminons ce travail par un algorithme de résolution effective de contraintes générales du premier ordre dans T_{ad}^*. L'algorithme est donné sous forme d'un ensemble de 28 règles de réécriture qui transforment toute formule φ, qui peut éventuellement contenir des variables libres, en une disjonction ϕ de formules résolues équivalente à φ dans T_{ad}^* et telle que ϕ est soit la formule *vrai*, soit la formule *faux*, soit une formule ayant au moins une variable libre et n'étant équivalente ni à *vrai* ni à *faux* dans T_{ad}^*. De plus, les solutions des variables libres de ϕ sont présentées d'une manière claire et explicite dans ϕ.

Mots-clés: Théorie des arbres finis ou infinis, théorie complète, combinaison de théories, résolution de contraintes du premier ordre, règles de réécriture.